Přehled probrané látky z MAII, LS 2004/05

1. přednáška 21.2.2005. Opakování látky o primitivních funkcích ze závěru zimního semestru (23.-25. přednáška). Rozklad racionální funkce na parciální zlomky. Popis hledání primitivní funkce k obecné racionální funkci $p(x)/q(x)$ (s reálnými koeficienty) pomocí rozkladu na součet parciálních zlomků; výsledná primitivní funkce je obecně tvaru $r(x) + s_1 \log(u_1(x)) + \cdots + s_m \log(u_m(x)) + a_1 \mathrm{arctg}(b_1(x)) + \cdots + a_n \mathrm{arctg}(b_n(x))$, kde $r(x)$ je racionální funkce, s_i a a_i jsou konstanty, $u_i(x)$ jsou kvadratické a $b_i(x)$ lineární polynomy.
2. přednáška 28.2.2005. URČITÝ INTEGRÁL. Dělení intervalu D, zjemnění dělení, dolní a horní riemannovská suma $s(f, D)$ a $S(f, D)$, horní a dolní Riemannův integrál funkce f na intervalu $[a, b]$. **Lemma:** Zjemněním dělení D suma $s(f, D)$ vzroste (nebo zůstane stejná) a $S(f, D)$ poklesne (nebo zůstane stejná). **Lemma:** $s(f, D) \le S(f, E)$ pro každá dvě dělení D a E. **Důsledek:** $m(b-a) \le s(f, D) \le \underline{\int_a^b} f\ dx \le \overline{\int_a^b} f\ dx \le S(f, E) \le M(b-a)$, kde D a E jsou dělení $[a, b]$ a m (M) je inf (sup) funkce f na $[a, b]$. Riemannův integrál funkce na intervalu, riemannovsky integrovatelné funkce. **Věta 1 (aproximace d. a h. integrálu riemannovskými sumami):** Je-li f omezená reálná funkce na $[a, b]$ a D_1, D_2, $\ldots$ je posloupnost dělení intervalu $[a, b]$ taková, že max. délka intervalu v D_n pro $n \to \infty$ jde k nule, potom $\underline{\int_a^b} f\ dx = \sup\{s(f, D_n) :\ n = 1, 2, \ldots\} = \lim_{n\to\infty} s(f, D_n)$ a podobně pro horní integrál.
3. přednáška 7.3.2005. Příklad výpočtu R.-ova integrálu z definice: $\int_0^1 x^2\ dx = 1/3$. **Věta 2 (kritérium existence R.-ova integrálu):** Omezená funkce f má na $[a, b]$ R.-ův integrál, právě když pro každé $\varepsilon > 0$ existuje dělení D tohoto intervalu takové, že $S(f, D) - s(f, D) < \varepsilon$. Stejnoměrně spojité funkce. Příklad funkce, jež je na intervalu spojitá, ale ne stejnoměrně. **Věta 3 (spojitost na kompaktním intervalu implikuje stejnoměrnou spojitost):** Je-li f na $[a, b]$ spojitá, je na tomto (uzavřeném a omezeném) intervalu stejnoměrně spojitá. **Věta 4 (spojitá funkce má R.-ův integrál):** Je-li f na $[a, b]$ spojitá, má na $[a, b]$ R.-ův integrál. **Věta 5 (monotonie $\Rightarrow$ R.-ův integrál):** Je-li f na $[a, b]$ monotonní, má na $[a, b]$ R.-ův integrál. **Věta 6 (vlastnosti R.-ova integrálu):** a) (linearita) Jsou-li f, g na $[a, b]$ r.-ovsky integrovatelné, platí to i pro jejich součet a $\int_a^b (f+g)\ dx = \int_a^b f\ dx + \int_a^b g\ dx$, podobně pro násobek funkce; b) (monotonie) je-li $f(x) \le g(x)$ pro každé x z $[a, b]$, stejná nerovnost platí pro r.-ovy integrály obou funkcí (existují-li); c) (aditivita vzhledem k intervalu integrace) f je r.-ovsky integrovatelná na $[a, c]$, právě když je r.-ovsky integrovatelná na $[a, b]$ i na $[b, c]$ (kde $a < b < c$) a pak $\int_a^c f\ dx = \int_a^b f\ dx + \int_b^c f\ dx$; dokončení důkazu příště.
4. přednáška 14.3.2005. Dokončení důkazu. **Důsledky (V6.c):** Je-li f r.-ovsky integrovatelná na $[a, b]$, je r.-ovsky integrovatelná na každém podintervalu; $\int_a^b f\ dx + \int_b^c f\ dx + \int_c^a f\ dx = 0$, jsou-li alespoň dva integrály definované (užíváme konvenci $\int_a^b f\ dx = -\int_b^a f\ dx$). **Věta 7 (vlastnosti integrálu jako funkce integrační meze):** Má-li f R.-ův integrál na každém podintervalu $[a, b]$ intervalu J, je funkce $F(x) = \int_c^x f(t)\ dt$ (c je libovolný pevný

bod z J) na intervalu J spojitá a $F'(y) = f(y)$ pro každý bod spojitosti y funkce f. **Důsledek:** Funkce spojitá na otevřeném intervalu na něm má primitivní funkci. **Věta 7.5 (Riemannův integrál = Newtonův integrál pro spojité funkce):** Je-li f spojitá na $[a, b]$, potom každá její primitivní funkce na (a, b) má vlastní jednostranné limity A, B v krajních bodech a, b a platí $B - A = \int_a^b f(t)\, dt$. Newtonův integrál funkce na intervalu (a, b) a newtonovsky integrovatelne funkce. Vztah tříd $R(a, b)$ a $N(a, b)$ riemannovsky a newtonovsky integrovatelných funkcí. **Věta (charakterizace riemannovsky integrovatelných funkcí):** Omezená funkce na intervalu $[a, b]$ na něm má R.-ův integrál, právě když lze množinu jejích bodů nespojitosti pokrýt spočetně mnoha intervaly s libovolně malou celkovou délkou; bez důkazu.

Přednášky 21.3.2005 a 28.3.2005 odpadly pro zahraniční služební cestu přednášejícího a velikonoční pondělí. První z nich je nahrazena doplňkovým textem.

5. přednáška 4.4.2005. Věta 8 (per partes pro urč. integrály): Jsou-li funkce f, g, f', g' spojité na $[a, b]$, potom $\int_a^b f'g\, dx = (f(b)g(b) - f(a)g(a)) - \int_a^b fg'\, dx$. **Věta 9 (substituce pro urč. integrály):** Je-li f spojitá na $[a, b]$ a $g : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ má na $[\alpha, \beta]$ spojitou derivaci, máme $\int_\alpha^\beta f(g)g'\, dx = \int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f\, dx$; je-li navíc g na a ryze monotonní, máme (totéž v jiném zápisu) $\int_a^b f\, dx = \int_{g^{-1}(\alpha)}^{g^{-1}(\beta)} f(g).g'\, dx$. **Věta 10 (integrální kritérium konvergence řad):** Je-li f na $[a-1, \infty)$ spojitá, nezáporná a nerostoucí (a je přir. číslo), potom řada $f(a)+f(a+1)+f(a+2)+\ldots$ konverguje, právě když je (Newtonův) $\int_a^\infty f\, dx$ konečný. Plyne to z odhadu $\int_a^{b+1} f\, dx \le f(a)+f(a+1)+\ldots+f(b) \le \int_{a-1}^b f\, dx$ (za předpokladů V10 o f). Čtyři příklady na počítání součtů a sum pomocí integrálů. **1.** $1/1^s + 1/2^s + \ldots$ konverguje, právě když $s > 1$. **2.** $1/(2(\log 2)^s) + 1/(3(\log 3)^s) + \ldots$ konverguje, právě když $s > 1$. **3.** $1/1 + 1/2 + \ldots + 1/n = \log n+\gamma+O(1/n)$. **4.** $n! = c.n^{1/2}(n/e)^n(1+O(1/n))$ (kde konstanta c je $(2\pi)^{1/2}$, ale to nedokážeme). Definice délky křivky zadané jako úsek grafu funkce. **Věta 11 (délka křivky):** Má-li f na $[a, b]$ spojitou derivaci, je délka grafu funkce $f(x)$ na intervalu $[a, b]$ rovna $\int_a^b (1 + (df/dx)^2)^{1/2}\, dx$; bez důkazu.

6. přednáška 11.4.2005. Věta 12 (rotační těleso): Je-li f na $[a, b]$ spojitá a nezáporná, je objem rotačního tělesa vzniklého rotací útvaru pod grafem f kolem osy x (v třírozměrném prostoru) rovný $\pi \int_a^b f(x)^2\, dx$; má-li f na $[a, b]$ spojitou derivaci, má toto rotační těleso povrch pláště (bez obou bočních stěn) rovný $2\pi \int_a^b f(x)(1+(f(x)')^2)^{1/2}\, dx$; bez důkazu. **POSLOUPNOSTI A ŘADY FUNKCÍ.** Definice bodové, stejnoměrné a lokálně stejnoměrné konvergence posloupnosti funkcí f_n k funkci f na množině M. Příklady na tyto typy konvergence. **Věta 1 (ekvivalentní formulace stejnoměrné konvergence):** Funkce f_n stejnoměrně konvergují k funkci f na M, právě když $s_n \to 0$, kde s_n je supremum hodnot $|f_n(x)-f(x)|$ na M. **Věta 2 (Moore-Osgoodova, záměna pořadí funkční a diskrétní limity):** Nechť M obsahuje prstencové okolí bodu z, pro každé n existuje vlastní limita $a_n := \lim_{x \to z} f_n(x)$ a posloupnost funkcí

f_n konverguje na M stejnoměrně k f, potom existují vlastní limity $\lim_{n\to\infty} a_n$ a $\lim_{x\to z} f(x)$ a rovnají se. **Důsledek:** Stejnoměrná limita spojitých funkcí (na intervalu) je opět spojitá funkce. **Lemma (Bolzano-Cauchyova podmínka pro posloupnosti funkcí):** Posloupnost funkcí konverguje na M stejnoměrně, právě když je na M stejnoměrně cauchyovská; důkaz je v doplňkovém textu. **Věta 3 (záměna pořadí diskrétní limity a derivování):** Mají-li funkce f_n na intervalu (a, b) vlastní derivace, které na něm konvergují lokálně stejnoměrně k funkci g a posloupnost funkčních hodnot $f_n(x)$ konverguje pro alespoň jedno x z (a, b), potom funkce f_n konvergují na (a, b) lokálně stejnoměrně k funkci f, jejíž derivace se na (a, b) rovná g. Poznámka: Je-li konvergence derivací stejnoměrná, potom i f_n konvergují k f stejnoměrně; a a b ale musí být konečné.
7. přednáška 18.4.2005. Věta 4 (záměna pořadí diskrétní limity a integrování): Má-li každá funkce f_n na intervalu (a, b) Newtonův integrál a konverguje-li (f_n) na (a, b) stejnoměrně k f, má také f na (a, b) Newtonův integrál a $\int_a^b f(x)\ dx = \lim_n \int_a^b f_n(x)\ dx$; důkaz je v doplňkovém textu. **Věta 5 (Diniho):** Konverguje-li na $[a, b]$ posloupnost (f_n) monotóně k f, přičemž f_n i f jsou spojité, je tato konvergence stejnoměrná; bez důkazu. **Věta 6 (Weierstrassova):** Každá funkce spojitá na $[a, b]$ tam je stejnoměrnou limitou posloupnosti polynomů; bez důkazu. **Poznámka:** Je-li f spojitá na $[0, 1]$ a $B_n(f, x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f(k/n)x^k(1-x)^{n-k}$ jsou tzv. Bernsteinovy polynomy, potom $B_n(f, x)$ konvergují na $[0, 1]$ stejnoměrně k f. Bodová, lokálně stejnoměrná a stejnoměrná konvergence řad funkcí. **Věta 7 (Weierstrassovo kritérium):** Pokud číselná řada $s_1+s_2+s_3+\ldots$ konverguje, přičemž $s_n = \sup_M |f_n|$, potom řada funkcí $f_1 + f_2 + f_3 + \ldots$ konverguje na M stejnoměrně. **Věta 8 (záměna pořadí sumace a derivace):** Mají-li funkce f_n na intervalu (a, b) vlastní derivace, jejichž součet (tj. řada) na něm konverguje lokálně stejnoměrně k funkci g a číselná řada $f_1(x) + f_2(x) + \ldots$ konverguje pro alespoň jedno x z (a, b), potom řada $f_1 + f_2 + \ldots$ konverguje na (a, b) lokálně stejnoměrně k funkci f, jejíž derivace se na (a, b) rovná g. Poznámka: Je-li konvergence řady derivací stejnoměrná, potom i řada $f_1 + f_2 + \ldots$ konverguje k f stejnoměrně; a a b ale musí být konečné. Příklad: Sečtení řady $x-x^3/3+x^5/5-\ldots$ $(M = (-1, 1))$. **Věta 9 (záměna pořadí sumace a integrování):** Analogie V4 pro řady funkcí. **Věta 10 (Abelovo kritérium):** Konverguje-li řada $f_1+f_2+f_3+\ldots$ na M stejnoměrně, posloupnost funkcí (g_n) je na M stejně omezená a pro každé x z M je posloupnost $(g_n(x))$ monotónní, potom řada $f_1g_1 + f_2g_2 + f_3g_3 + \ldots$ na M konverguje stejnoměrně. **Věta 11 (Dirichletovo kritérium):** Má-li řada $f_1 + f_2 + f_3 + \ldots$ na M stejně omezené částečné součty, posloupnost funkcí (g_n) na M stejnoměrně konverguje k nulové funkci a pro každé x z M je posloupnost $(g_n(x))$ monotónní, potom řada $f_1g_1 + f_2g_2 + f_3g_3 + \ldots$ na M konverguje stejnoměrně. Důkazy V10 a V11 jsou v doplňkovém textu. **MOCNINNÉ ŘADY.** Vše v reálném oboru. Mocninná řada s koeficienty a_n a se středem v a: $a_0+a_1(x-a)+a_2(x-a)^2+\ldots$ (vše je reálné). **Věta 1 (poloměr konvergence mocninné řady):** Pro každou m. řadu (se středem v a) existuje právě jedno reálné číslo R z $[0, \infty]$, že pro x splňující $|x - a| < R$ řada absolutně konverguje a pro x splňující $|x - a| > R$ řada diverguje, o dvou krajních bodech $x = a \pm R$ se nic netvrdí. **Věta 2 (vý-**

počet poloměru konvergence m. řady): $R = 1/\limsup |a_n|^{1/n}$. Důkazy V1 a V2 budou příště.

8. přednáška 25.4.2005. Důkazy Vět 1 a 2. Příklady m. řad, jejich středů a poloměrů konvergence. **Věta 3 (lokálně stejnoměrná konvergence m. řady):** Má-li m. řada střed a a poloměr konvergence $R > 0$, konverguje lokálně stejnoměrně na $(a - R, a + R)$. **Věta 4 (derivace m. řady):** Má-li m. řada $M = a_0 + a_1(x - a) + a_2(x - a)^2 + \ldots$ poloměr konvergence $R > 0$, má i $N = a_1 + 2a_2(x-a) + 3a_3(x-a)^2 + \ldots$ poloměr konvergence R a N na intervalu $(a-R, a+R)$ určuje funkci, jež je derivací funkce určené M. **Věta 5 (primitivní funkce k m. řadě):** Má-li m. řada $M = a_0 + a_1(x - a) + a_2(x - a)^2 + \ldots$ poloměr konvergence $R > 0$, má i m. řada $N = c + a_0(x - a) + a_1(x - a)^2/2 + a_2(x - a)^3/3 + \ldots$ poloměr konveregence R a N na intervalu $(a - R, a + R)$ určuje funkci primitivní k funkci určené M. **Věta 6 (Abelova):** Má-li m. řada $M = a_0 + a_1(x - a) + a_2(x - a)^2 + \ldots$ poloměr konvergence $0 < R < \infty$ a konverguje-li v $x = a + R$ k číslu s, potom se s rovná limitě funkce určené M v bodě $a + R$ zleva. **Příklad:** sečtení číselné řady $1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + \ldots$ pomocí Abelovy věty. Něco k motivaci mocninných řad. Jacobiho identita pro počet vyjádření čísla n jako součtu čtyř čtverců. Více příště.

9. přednáška 2.5.2005. Mocninné řady jsou hlavním nástrojem kombinatorické enumerace. **Příklad:** $1+p(1)x+p(2)x^2+\ldots = 1/((1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots)$, kde $p(n)$ je počet rozkladů čísla n. Důkaz pomocí m. řad toho, že počet rozkladů přirozeného čísla n na různé části je stejný jako počet rozkladů n na liché části. **FOURIEROVY ŘADY.** Fourierova řada funkce $f(x)$, která je 2π-periodická a na $[-\pi, \pi]$ má Riemannův integrál, je řada $a_0/2 + a_1 \cos(x) + b_1 \sin(x) + a_2 \cos(2x) + b_2 \sin(2x) + \ldots$, kde $a_n = (1/\pi) \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx)\, dx$ a pro b_n máme stejnou formuli se $\sin(nx)$. **Tvrzení (ortogonalita sinů a cosinů, základ všeho):** Označme jako $\langle f, g\rangle$ integrál $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\, dx$, potom ($m, n$ jsou nezáporná celá čísla) $\langle \sin(mx), \cos(nx)\rangle$ je vždy 0 a $\langle \sin(mx), \sin(nx)\rangle = \langle \cos(mx), \cos(nx)\rangle = 0$ pro m různé od n a $= \pi$ pro $m = n > 0$.

10. přednáška 9.5.2005. Vlastnosti skalárního součinu $\langle \cdot, \cdot\rangle$: symetrie, bilinearita a $\langle f, f\rangle \geq 0$. **Věta 1 (Besselova nerovnost):** Má-li f na $[-\pi, \pi]$ Riemannův integrál, potom je součet čtverců jejích Fourierových koeficientů ($a_0/2$ přejde na $a_0^2/2$) nanejvýš $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2\, dx$. **Věta 2 (Riemannnovo-Lebesgueovo lemma):** Má-li f na $[-\pi, \pi]$ Riemannův integrál, potom $\lim_n \langle f(x), \sin(nx)\rangle = 0$ a totéž pro $\cos(nx)$. Po částech spojité a po částech hladké funkce. **Lemma:** $(1/2) + \cos x + \cos(2x) + \ldots + \cos(nx) = (\sin(n+1/2)x)/(2\sin(x/2))$. **Důsledek:** Předchozí funkce má přes interval $[0, \pi]$ integrál π a totéž přes interval $[-\pi, 0]$. **Věta 3 (O konvergenci Fourierovy řady):** Nechť f je 2π-periodická a na $[-\pi, \pi]$ po částech hladká, potom její Fourierova řada na $\mathbf{R}$ bodově konverguje k funkci $(f(x + 0) + f(x - 0))/2$.

11. přednáška 16.5.2005. Věta 4 (O stejnoměrné konvergenci Fourierovy řady): Je-li f 2π-periodická, po částech hladká a spojitá na $\mathbf{R}$, potom její Fourierova řada na $\mathbf{R}$ konverguje stejnoměrně k f. **Věta 5:** Je-li f 2π-periodická a po částech hladká, pak její Fourierova řada k ní stejnoměrně konverguje na každém kompaktním intervalu spojitosti; bez důkazu. Dva příklady na Fourierovy řady: 1) $f(x) = x^2$ na intervalu $[0, \pi)$, rozvoj do cosinové řady a 2)

$f(x) = \pi - x$ na intervalu $(-\pi, \pi)$, rozvoj do Fourierovy řady; důsledky: číselné identity $1 + 1/4 + 1/9 + \ldots = \pi^2/6$ a $1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + \ldots = \pi/4$. **METRICKÉ PROSTORY.** Definice, příklady metrických prostorů: ℓ_1-, ℓ_2-, ℓ_∞-metriky na $\mathbf{R}_n$, supremová metrika na množině funkcí.

12. přednáška 23.5.2005. Další příklady metr. prostorů (integrální metrika, diskrétní metrika), otevřená a uzavřená koule, otevřená a uzavřená množina. **Věta 1 (vlastnosti otevřených množin):** Prázdná množina a celý metr. prostor jsou otevřené množiny, otevřené množiny se zachovávají konečnými průniky a libovolnými sjednoceními. **Věta 2 (vlastnosti uzavřených množin):** Prázdná množina a celý metr. prostor jsou uzavřené množiny, uzavřené množiny se zachovávají konečnými sjednoceními a libovolnými průniky. Uzávěr a vnitřek množiny. **Věta 3 (vlastnosti uzávěru množiny):** (i) uzávěr prázdné množiny a všeho je zase totéž, (ii) uzávěr uzávěru je uzávěr, (iii) uzávěr a sjednocení (dvou) množin jsou záměnné operace, (iv) uzávěr množiny jsou presně ty prvky metr. prostoru, které od ní mají nulovou vzdálenost a (v) je-li A podmnožinou B, totéž platí i pro uzávěry obou množin.

Termíny zkoušek: Písemky 1.6.05, 8.6.05, 14.6.05, 22.6.05, 29.6.05 a 21.9.05 v K1 a dalších posluchárnách v Karlíně. Další informace (ústní část) viz SIS; zapisujte se prosím do SISu.

Písemná část zkoušky (prověření početní dovednosti): trvá 2 hodiny a sestává ze 4 příkladů: primitivní funkce a Newtonův integrál (15 bodů), bodová a stejnoměrná konvergence posloupností a řad funkcí (15 bodů), mocninná řada (10 bodů) a Fourierova řada (10 bodů); celkem maximálně 50 bodů. Pro složení písemné části zkoušky a pro postup k ústní části zkoušky je třeba získat alespoň 25 bodů (výsledek z jedné písemky se započítává do všech zkoušek, po úspěšném složení ji nemusíte opakovat). Započítávají se vám bodové zisky z testu 8.4.2005 a bodové zisky z testu 20.5.2005, jsou-li alespoň 4 body z příkladu. Jsou povoleny běžné psací potřeby a písemné materiály (tj. poznámky z přednášek). Technické pomůcky (mobilní telefony, kalkulačky, notebooky, atd.) nejsou povoleny. Příklad zkouškové písemky je na www straně doc. L. Picka .

Ústní část zkoušky (prověření teoretických znalostí) obsahuje 2 otázky: (1) tematický okruh (několik k sobě tematicky patřících výsledků a vět, popř. příkladů, vyžadovaných bez důkazu) a (2) věta (věty) s důkazem (důkazy). Otázky si budete losovat z níže uvedených seznamů. Rozumí se, že v ústní části nejsou povoleny ani technické pomůcky ani písemné materiály (poznámky z přednášek, učebnice atd.).

V celkovém hodnocení zkoušky mají písemná i ústní část stejnou váhu, např. 3 z písemky + 1 z ústní části = celková 2. Orientační bodové hodnocení písemné části: 25 - 33 bodů je za 3, 33 - 41 bodů je za 2 a 41 - 50 bodů je za 1. Pro hodnocení ústní části nestanovuju žádné přesné bodové schéma.

Otázky pro ústní část

1. Tematické okruhy (věty a výsledky bez důkazů). 1. Popište postup integrace obecné racionální funkce. **2.** Definujte Riemannův integrál funkce. **3.** Uveďte základní výsledky o Riemannově integrálu a třídách riemannovsky integrovatelných funkcí (V1 až V6). **4.** Uveďte další výsledky o Riemannově integrálu a jeho aplikacích a souvislost s Newtonovým integrálem (V7 až V12). **5.** Definujte jednotlivé typy konvergence posloupností funkcí a uveďte Bolzano-Cauchyovu podmínku stejnoměrné konvergence a souvislost mezi lokálně stejnoměrnou a stejnoměrnou konvergencí. **6.** Uveďte věty o záměně pořadí limity a další operace, umožněné stejnoměrnou konvergencí, a to i pro řady funkcí (V2, V3 a V4 pro posloupnosti, V8 a V9 pro řady). **7.** Uveďte kritéria stejnoměrné konvergence řad funkcí (V7, V10 a V11). **8.** Definujte obecnou mocninnou řadu a uveďte výsledky o jejím poloměru konvergence (V1 a V2). **9.** Uveďte výsledky o konvergenci mocninných řad a operacích s nimi (V3 až V6). **10.** Definujte Fourierovu řadu funkce a uveďte výsledky o ortogonalitě funkcí $\sin(nx)$ a $\cos(nx)$. **11.** Uveďte základní výsledky o Fourierových řadách (V1 až V5). **12.** Uveďte základní definice a pojmy z teorie metrických prostorů (definice m. prostoru, koule, otevřené a uzavřené množiny, uzávěr a vnitřek množiny).

2. Věta(y) s důkazem(y). 1. Dokažte větu o aproximaci dolního a horního Riemannova integrálu riemannovskými sumami a kritérium existence Riemannova integrálu (V1 a V2). **2.** Dokažte, že spojitá funkce má na kompaktním intervalu Riemannův integrál (V3 a V4). **3.** Dokažte vlastnosti aditivity a monotonie Riemannova integrálu (V6). **4.** Dokažte, že funkce spojitá na (a, b) má na (a, b) primitivní funkci (tj. V7). **5.** Dokažte souvislost mezi Riemannovým a Newtonovým integrálem (V7.5). **6.** Dokažte integrální kritérium konvergence řad (V10) a uveďte příklady na jeho použití. **7.** Dokažte Mooreovu-Osgoodovu větu (V2) a větu o záměně limity a derivování (V3). **8.** Dokažte větu o záměně limity a integrování (V4) a Weierstrassovo kritérium stejnoměrné konvergence řady funkcí (V7). **9.** Dokažte Abelovo nebo Dirichletovo kritérium stejnoměrné konvergence řady funkcí (V10 nebo V11). **10.** Dokažte vzorec pro poloměr konvergence mocninné řady (V2). **11.** Dokažte vzorce pro derivování a integrování mocninné řady člen po členu (V4 a V5). **12.** Dokažte Abelovu větu o mocninných řadách. **13.** Dokažte Besselovu nerovnost a Riemannovo-Lebesgueovo lemma (V1 a V2). **14.** Dokažte větu o bodové konvergenci Fourierovy řady po částech hladké funkce (V3). **15.** Dokažte větu o stejnoměrné konvergenci Fourierovy řady spojité a po částech hladké funkce (V4). **16.** Dokažte, že $1 + 1/4 + 1/9 + 1/16 + \ldots = \pi^2/6$ a $1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + \ldots = \pi/4$.