Doplňkový text za přednášku 21.3.2005

Poznámka. Funkce f_n, $n \in \mathbb{N}$, a f buďte definované na intervalu (a,b), kde $a, b \in \mathbb{R}^*$ (může být $a = -\infty$ nebo $b = \infty$). Potom

$$f_n \overset{loc}{\rightrightarrows} f \text{ na } (a,b) \iff f_n \rightrightarrows f \text{ na } [c,d] \text{ pro } \forall\, [c,d] \subset (a,b), c, d \in \mathbb{R}.$$

Důkaz. Implikace $\Leftarrow$ je jasná z definice lokálně stejnoměrné konvergence, protože každé dostatečně malé okolí bodu v (a,b) lze pokrýt kompaktním intervalem ležícím v (a,b).

Implikaci $\Rightarrow$ dokážeme sporem. Nechť $f_n \overset{loc}{\rightrightarrows} f$ na (a,b), ale pro nějaký interval $[c,d] \subset (a,b)$ nemáme $f_n \rightrightarrows f$ na $[c,d]$. To znamená (znegujeme definici stejnoměrné konvergence), že existuje reálné $e > 0$ a nekonečná posloupnost dvojic $(n_1, x_1), (n_2, x_2), \ldots$ taková, že $1 \leq n_1 < n_2 < \ldots$ jsou přirozená čísla, $x_1, x_2, \ldots$ jsou body z intervalu $[c,d]$ a

$$|f_{n_i}(x_i) - f(x_i)| \geq e$$

pro každé $i \in \mathbb{N}$. Můžeme předpokládat, že $x_i \to \alpha$ pro $i \to \infty$. (Protože $x_1, x_2, \ldots$ je omezená posloupnost, lze z ní vybrat konvergentní podposloupnost $x_{m_1}, x_{m_2}, \ldots$. Abychom se vyhnuli složitým indexům, pro jednoduchost tuto podposloupnost označíme opět jako $x_1, x_2, \ldots$). Protože x_i jsou z uzavřeného intervalu $[c,d]$, leží v něm i jejich limita α a tedy, klíčově, $\alpha \in (a,b)$. Podle předpokladu o lokálně stejnoměrné konvergenci na (a,b) existují $\delta > 0$ a $N \in \mathbb{N}$ takové, že

$$|f_n(x) - f(x)| < e \text{ pro každé } n \geq N \text{ a } x \in (\alpha - \delta, \alpha + \delta)$$

(δ volíme rovnou tak malé, že $(\alpha - \delta, \alpha + \delta) \subset (a,b)$). Nyní vezmeme tak velké $j \in \mathbb{N}$, že $n_j \geq N$ a $x_j \in (\alpha - \delta, \alpha + \delta)$. Pak máme současně

$$\begin{aligned} |f_{n_j}(x_j) - f(x_j)| &< e \\ |f_{n_j}(x_j) - f(x_j)| &\geq e, \end{aligned}$$

což je spor. ∎

Lemma. (Bolzano–Cauchyova podmínka pro posloupnosti funkcí.) Funkce f_n, $n \in \mathbb{N}$, a f buďte definované na množině $M \subset \mathbb{R}$. Pak

$$f_n \rightrightarrows f \text{ na } M \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall m, n \geq n_0\ \forall x \in M:\ |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

Důkaz. Nejprve implikace $\Rightarrow$. Pro $\varepsilon/2$ vezmeme takové $n_0 \in \mathbb{N}$, že pro každé $n \geq n_0$ a $x \in M$ máme $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/2$. Podle Δ-ové nerovnosti pak pro každé $m, n \geq n_0$ a $x \in M$ máme

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

I $\Leftarrow$ je lehká. Stejnoměrná B.-C. podmínka pro posloupnost funkcí $(f_n)_{n\geq 1}$ nám dává, že pro každé pevné $x \in M$ splňuje $(f_n(x))_{n\geq 1}$ B.-C. podmínku pro číselnou posloupnost a tedy je konvergentní. Limitu si označíme jako $f(x)$. Našli jsme tedy funkci $f : M \to \mathbb{R}$ takovou, že $f_n \to f$ na M. Ukážeme, že konvergence je dokonce stejnoměrná. Pro dané $\varepsilon > 0$ vezmeme n_0, že pro každé $m, n \geq n_0$ a $x \in M$ platí

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon/2$$

(díky stejnoměrné B.-C. podmínce pro posloupnost funkcí). Pro (nepřítelem) daný bod $x \in M$ vezmeme tak velké $N \in \mathbb{N}$, že $N \geq n_0$ a $|f_N(x) - f(x)| < \varepsilon/2$ (díky bodové konvergenci). Pro každé $n \geq n_0$ pak (díky Δ-ové nerovnosti)

$$|f_n(x) - f(x)| \leq |f_n(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f(x)| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Protože n_0 na x nezávisí, dokázali jsme, že $f_n \rightrightarrows f$ na M. ∎

Věta 4. (záměna pořadí diskrétní limity a integrace.) Nechť $f_n \rightrightarrows f$ na (a, b), kde $a, b \in \mathbb{R}^*$, a funkce f_n mají na (a, b) Newtonův integrál. Potom ho má i f a

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx.$$

Důkaz. Zvolíme si libovolně $x_0 \in (a, b)$ a primitivní funkce F_n k f_n na (a, b) tak, že $F_n(x_0) = 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Podle V3 (záměna pořadí diskrétní limity a derivování) a poznámky za ní (stejnoměrná konvergence derivací dává stejnoměrnou konvergenci původních funkcí) existuje funkce $F : (a, b) \to \mathbb{R}$ taková, že $F_n \rightrightarrows F$ a $F' = f$ na (a, b). Podle předpokladu o f_n existují vlastní jednostranné limity $F_n(a^+) := \lim_{x\to a^+} F_n(x)$ a $F_n(b^-) := \lim_{x\to b^-} F_n(x)$. Podle V2 (záměna pořadí diskrétní a spojité limity) existují vlastní limity $\lim_{n\to\infty} F_n(a^+)$ a $F(a^+) := \lim_{x\to a^+} F(x)$ a rovnají se; totéž pro $F_n(b^-)$ a $x \to b^-$. Takže f má na (a,b) Newtonův integrál a

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &= F(b^-) - F(a^+) = \lim_{n\to\infty} F_n(b^-) - \lim_{n\to\infty} F_n(a^+) \\ &= \lim_{n\to\infty} (F_n(b^-) - F_n(a^+)) \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx.\end{aligned}$$

■

Nechť $\mathcal{F}$ je množina funkcí definovaných na $M \subset \mathbb{R}$. Řekneme, že $\mathcal{F}$ je na M *stejně omezená*, pokud existuje konstanta $K > 0$ tak, že

$$\forall f \in \mathcal{F}\ \forall x \in M:\ |f(x) < K.$$

$\mathcal{F}$ může být i posloupnost funkcí. Že řada $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ má na M stejně omezené částečné součty znamená, že posloupnost funkcí $(f_0 + f_1 + \cdots + f_n)_{n\geq 0}$ je na M stejně omezená. Řekneme, že posloupnost $(f_n)_{n\geq 0}$ je na M *bodově monotónní*, pokud

$$\forall x \in M:\ (f_n(x))_{n\geq 0}\ \text{ je monotónní.}$$

Značení $g_n \rightrightarrows 0$ znamená, že g_n stejnoměrně konvergují k identicky nulové funkci. V následujících dvou větách jsou $(f_n)_{n\geq 0}$ a $(g_n)_{n\geq 0}$ dvě posloupnosti funkcí definovaných na $M \subset \mathbb{R}$.

Věta 10. (Abelovo kritérium.) Předpokládejme, že (i) $\sum_{n=0}^{\infty} f_n \rightrightarrows$ na M, (ii) $(g_n)_{n\geq 0}$ je na M stejně omezená a (iii) $(g_n)_{n\geq 0}$ je na M bodově monotónní. Potom

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n g_n \rightrightarrows \quad \text{na} \quad M.$$

Věta 11. (Dirichletovo kritérium.) Předpokládejme, že (i) $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ má na M stejně omezené částečné součty, (ii) $g_n \rightrightarrows 0$ na M a (iii) $(g_n)_{n\geq 0}$ je na M bodově monotónní. Potom

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n g_n \rightrightarrows \quad \text{na} \quad M.$$

Důkaz obou vět. Podle Lemmatu (B.-C. podmínka pro posloupnosti funkcí) stačí dokázat, že pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro každé $n \geq m \geq n_0$ a $x \in M$ platí $|f_m(x)g_m(x) + f_{m+1}(x)g_{m+1}(x) + \cdots + f_n(x)g_n(x)| < \varepsilon$.

Označme si

$$F_{m,n}(x) = f_m(x) + f_{m+1}(x) + \cdots + f_n(x),$$

kde pro $m > n$ klademe $F_{m,n}(x) = 0$. Pak pro každé $k \leq m$ máme

$$\begin{aligned} \left|\sum_{i=m}^{n} f_i(x)g_i(x)\right| &= \left|\sum_{i=m}^{n}(F_{k,i}(x) - F_{k,i-1}(x))g_i(x)\right| \\ &= \left|G(x) + \sum_{i=m}^{n-1} F_{k,i}(x)(g_i(x) - g_{i+1}(x))\right| \\ &\leq |G(x)| + \left|\sum_{i=m}^{n-1} F_{k,i}(x)(g_i(x) - g_{i+1}(x))\right|, \end{aligned}$$

kde

$$G(x) = -F_{k,m-1}g_m(x) + F_{k,n}(x)g_n(x).$$

Zavedeme si funkci $h: M \to \{-1, 1\}$ popisující bodovou monotonii posloupnosti $(g_n)_{n\geq 0}$:

$$h(x) = \begin{cases} 1 & \text{je-li } (g_n(x))_{n\geq 0} \text{ nerostoucí} \\ -1 & \text{je-li } (g_n(x))_{n\geq 0} \text{ neklesající.} \end{cases}$$

Nechť jsou splněny předpoklady Abelova kritéria a je dáno $\varepsilon > 0$. Vezmeme $K > 0$ takové, že $|g_n(x)| < K$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $x \in M$ (předpoklad (ii)), a $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $n \geq m \geq n_0$ a $x \in M$ máme $|F_{m,n}(x)| < \varepsilon/2K$ (předpoklad (i) a B.-C. podmínka pro posloupnosti funkcí). Hořejší odhad použijeme s $k = m$. Pak, pro všechna $n \geq m \geq n_0$ a $x \in M$,

$$|G(x)| = |F_{m,n}(x)| \cdot |g_n(x)| < (\varepsilon/2K) \cdot K = \varepsilon/2$$

a

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{i=m}^{n-1} F_{m,i}(x)(g_i(x)-g_{i+1}(x))\right| &\leq \sum_{i=m}^{n-1} |F_{m,i}(x)|\cdot|g_i(x)-g_{i+1}(x)| \\
&= \sum_{i=m}^{n-1} |F_{m,i}(x)|\cdot h(x)(g_i(x)-g_{i+1}(x)) \\
&< (\varepsilon/2K)h(x)\sum_{i=m}^{n-1} g_i(x)-g_{i+1}(x) \\
&= (\varepsilon/2K)h(x)(g_m(x)-g_n(x)) \\
&\leq (\varepsilon/2K)\max(|g_m(x)|,|g_n(x)|) \\
&< \varepsilon/2
\end{aligned}$$

(při úpravě na druhém řádku jsme použili předpoklad (iii)). Dohromady $|f_m(x)g_m(x)+f_{m+1}(x)g_{m+1}(x)+\cdots+f_n(x)g_n(x)| < \varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon$.

Nechť jsou splněny předpoklady Dirichletova kritéria a je dáno $\varepsilon > 0$. Vezmeme $K > 0$ takové, že $|F_{0,n}(x)| < K$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $x \in M$ (předpoklad (i)), a $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $n \geq n_0$ a $x \in M$ máme $|g_n(x)| < \varepsilon/3K$ (předpoklad (ii)). Nyní použijeme hořejší odhad s $k=0$. Pro všechna $n \geq m > n_0$ a $x \in M$ máme

$$|G(x)| \leq |F_{0,m-1}(x)|\cdot|g_m(x)|+|F_{0,n}(x)|\cdot|g_n(x)| < K\cdot(\varepsilon/3K+\varepsilon/3K)=2\varepsilon/3$$

a (s pomocí podobných úprav s využitím bodové monotonie (iii))

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{i=m}^{n-1} F_{0,i}(x)(g_i(x)-g_{i+1}(x))\right| &\leq \sum_{i=m}^{n-1} |F_{0,i}(x)|\cdot h(x)(g_i(x)-g_{i+1}(x)) \\
&< Kh(x)\sum_{i=m}^{n-1} g_i(x)-g_{i+1}(x) \\
&= Kh(x)(g_m(x)-g_n(x)) \\
&\leq K\max(|g_m(x)|,|g_n(x)|) \\
&< \varepsilon/3.
\end{aligned}$$

Dohromady opět $|f_m(x)g_m(x)+f_{m+1}(x)g_{m+1}(x)+\cdots+f_n(x)g_n(x)| < 2\varepsilon/3+\varepsilon/3=\varepsilon$. ■