Přednáška 2 27. 2. 2008

Algebraická teorie mocninných řad

Minule jsme odvodili rovnost

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n = \frac{1}{1-x-x^2}},$$

kde $f_0 = f_1 = 1$, $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ pro $n \geq 2$, f_n jsou Fibonacciova čísla. Jak ji rozumět? Co se rovná čemu? Jak rozumět dalším rovnostem

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n = \sum_{k=0}^{\infty} (x+x^2)^k$$

a

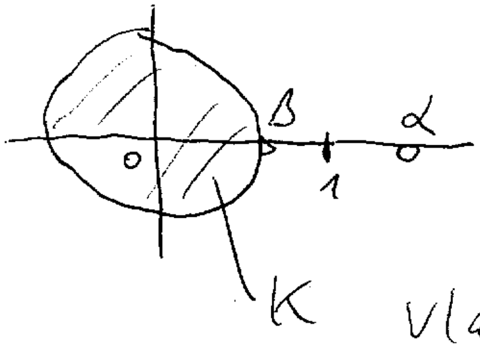
$$\frac{1}{1-x-x^2} = \frac{a}{1-\alpha x} + \frac{b}{1-\beta x} \quad \left(\begin{array}{l} \alpha = \frac{1}{2}(\sqrt{5}+1),\ a = \frac{\alpha}{\sqrt{5}}, \\ \beta = \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1),\ b = -\frac{\beta}{\sqrt{5}} \end{array} \right)$$

které se v odvození objevily?

---

a) $\boxed{\text{analytický pohled}}$, LS rovnosti, $\sum f_n x^n$, konverguje absolutně v ot. kruhu $K = \{x \in \mathbb{C} \mid |x| < \frac{1}{\alpha} = \beta \doteq 0.6\}$ a definuje tak funkci $F(x) := \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n$, $x \in K$, $F: K \to \mathbb{C}$.

Pravá strana rovnosti, $\frac{1}{1-x-x^2}$, definuje funkci $G(x) = \frac{1}{1-x-x^2}$, $G: \mathbb{C} \setminus \{\alpha, \beta\} \to \mathbb{C}$.

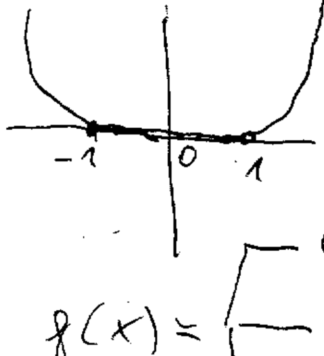


Platí: $F(x) = G(x)\ \forall x \in K.$

Obě funkce F a G mají na K vlastní derivaci: $F'(x) = \sum_{n \geq 1} n f_n x^{n-1}$ a $G'(x) = \dfrac{2x+1}{(1-x-x^2)^2}$. Připomeňme si větu z komplexní analýzy:

$\boxed{\text{Věta}}$ $\Omega \subset \mathbb{C}$ otevřená a souvislá, $x_1, x_2, \dots, y$ body z Ω, přičemž $\lim_{n \to \infty} x_n = y$, $(x_n \neq y)$, $F, G : \Omega \to \mathbb{C}$ mají na Ω vlastní derivace F', G' a $F(x_n) = G(x_n)$ pro $n = 1, 2, \dots$ a $F(y) = G(y)$. Potom $F(x) = G(x)\ \forall x \in \Omega$.

Hezké funkce se tedy na oblasti (ot. & souv. mn.) v komplexní rovině rovnají všude nebo (skoro) nikde. Obrázky pro reálné (hezké) funkce jako



se v $\mathbb{C}$ udělat nedají!

$$f(x) = \begin{cases} (x+1)^2 & \dots\ x \leq -1 \\ 0 & \dots\ -1 \leq x \leq 1 \\ (x-1)^2 & \dots\ x \geq 1 \end{cases}$$

b) <u>algebraický pohled</u> (tím se teď budeme nějakou chvíli zabývat) Na mn. ~~kor. řad~~ posloupností s prvky z $\mathbb{C}$, $\{(a_0, a_1, a_2, \dots) \mid a_n \in \mathbb{C}\}$, definujeme sčítání $+$ a násobení $\cdot$:

$$(a_0, a_1, a_2, \dots) + (b_0, b_1, b_2, \dots) := (a_0 + b_0, a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots)$$

$$(a_0, a_1, a_2, \dots) \cdot (b_0, b_1, b_2, \dots) := (a_0 b_0, a_1 b_0 + a_0 b_1, a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2, \dots)$$

Cauchyův součin

na k-tém místě je $a_k + b_k$, resp. $\sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$.

Místo posloupností píšeme formální nekonečné součty:

$(a_0, a_1, a_2, \dots) \longleftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ a $+, \cdot$ jsou pak

$$\sum a_n x^n + \sum b_n x^n = \sum (a_n + b_n) x^n$$

$$\left(\sum a_n x^n\right)\left(\sum b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) x^n.$$

Množinu všech (formálních) mocninných řad značíme

$$\mathbb{C}[[x]] := \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \mid a_n \in \mathbb{C} \right\}.$$

Podobně $\mathbb{Q}[[x]]$, $\mathbb{Z}[[x]]$ atd.

Tvrzení $(\mathbb{C}[[x]], +, \cdot)$ je komutativní okruh s 1.

D. + je Abelova grupa, protože sčítáme po složkách a v $\mathbb{C}$ to tak je. Že $\cdot$ je komut. monoid a platí distributivita je též jasné – platí to pro polynomy. ~~čili v $\mathbb{C}[x]$~~ Připomeňme, že

$0 = 0 \cdot x^0 + 0 \cdot x^1 + 0 \cdot x^2 + \ldots$

$1 = 1 \cdot x^0 + 0 \cdot x^1 + 0 \cdot x^2 + \ldots$ $\boxtimes$

Pro $F \in \mathbb{C}[[x]]$, $F = a_0 + a_1 x + \ldots$, definujeme

$[x^k]F := a_k$ a $\mathrm{ord}(F) := \min k$, že $a_k \neq 0$, pro $F \neq 0$,

řád F

$\mathrm{ord}(0) := +\infty$. $\quad \mathrm{ord}(FG) = \mathrm{ord}(F) + \mathrm{ord}(G)$

$\forall F, G.$

$F \neq 0 \iff \mathrm{ord}(F) < +\infty.$

Tvrzení Okruh $(\mathbb{C}[[x]], +, \cdot)$ nemá dělitele nuly, tj. $F \neq 0, G \neq 0 \Rightarrow FG \neq 0$.

D $F, G \neq 0 \rightarrow \mathrm{ord}(FG) = \mathrm{ord}(F) + \mathrm{ord}(G) < +\infty$

$\rightarrow FG \neq 0.$ $\boxtimes$

Můžeme tedy krátit: $FG = FH, F \neq 0, \Rightarrow G = H$.

Připomeňme si, že <u>jednotky</u> okruhu jsou jeho invertibilní prvky vzhledem k násobení, lze jimi dělit. Např. v $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ jsou jednotky jen 1 a -1. Jednotky tvoří vzhledem k násobení grupu.

$\boxed{\text{Tvrzení}}$ $F \in \mathbb{C}[[x]]$, $F = a_0 + a_1x + \cdots$, je jednotka $\iff a_0 \neq 0$.

D. Když $a_0 = 0$, pak $\mathrm{ord}(F) \geq 1$ a $\mathrm{ord}(FG) = \mathrm{ord}(F) + \mathrm{ord}(G) \geq 1$ $\forall G$, takže nikdy $FG = 1$ $(\mathrm{ord}(1) = 0)$. Když $a_0 \neq 0$, $G = b_0 + b_1x + \ldots$ splňující $FG = 1$ dostaneme porovnáním koeficientů:

$(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots)(b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots) = 1$ dává soustavu

$$\begin{aligned}
a_0b_0 &= 1 \to b_0 = a_0^{-1} \\
a_1b_0 + a_0b_1 &= 0 \to b_1 = -a_1b_0a_0^{-1} \\
a_2b_0 + a_1b_1 + a_0b_2 &= 0 \to b_2 = -(a_2b_0 + a_1b_1)a_0^{-1} \\
&\vdots \qquad\qquad \vdots
\end{aligned}$$

$\boxtimes$

Rovnost $\sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n = \frac{1}{1-x-x^2}$ lze tedy chápat jako rovnost v okruhu $(\mathbb{C}[[x]],+,\cdot)$, která říká, že $1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + 8x^5 + \ldots$ a $1 - x - x^2$ $(+0x^3 + 0x^4 + \ldots)$ jsou vzájemně inverzní (formální) mocn. řady:

$$(1+x+2x^2+3x^3+5x^4+8x^5+\dots)\cdot(1-x-x^2)=1.$$

Speciální moc. řady jsou polynomy

$$a_0+a_1x+\dots+a_k x^k \quad (a_k\neq 0,\ a_n=0 \text{ pro } n>k)$$

a geometrické řady

$$1+ax+a^2x^2+\dots,\ a\in\mathbb{C}.$$

Zřejmě $(1+ax+a^2x^2+\dots)(1-ax)=1+(a-a)x+(a^2-a^2)x^2+$

$+\dots=1$,

takže $1+ax+a^2x^2+\dots$ a $1-ax$ jsou vzájemně inverzní.

Jak rozumět rovnosti z rozkladu na parciální zlomky

$$\frac{1}{1-x-x^2}=\frac{a}{1-\alpha x}+\frac{b}{1-\beta x}\quad(\alpha,\beta,a,b=\text{ viz výše})?$$

Třemi způsoby (zdatný algebraik či algebraický geometr by z našel další):

1. Rovnost mezi komplexními funkcemi.
2. Rovnost v $\mathbb{C}[[x]]$, tj. mezi moc. řadami:

$$(1-x-x^2)^{-1}=a(1-\alpha x)^{-1}+b(1-\beta x)^{-1}!$$

3. Rovnost v $\mathbb{C}(x)$, tj. mezi racionálními funkcemi ($\mathbb{C}(x)=\{\frac{p(x)}{q(x)}\mid p,q\in\mathbb{C}[x]$ jsou polynomy$\}$):

$$\frac{a}{1-\alpha x}+\frac{b}{1-\beta x}=\frac{a(1-\beta x)+b(1-\alpha x)}{(1-\alpha x)(1-\beta x)}=\frac{a+b-(a\beta+b\alpha)x}{1-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta x^2}=\frac{1}{1-x-x^2}.$$

Formální konvergence moc. řad. Posloupnost $F_1, F_2, \dots$, kde $F_n \in \mathbb{C}[[x]]$, (formálně) konverguje, když $\forall k \; \exists n_0 = n_0(k)$, že pro $n > n_0$ jsou koeficienty $[x^k]F_n$ konstantní, tj. $[x^k]F_{n_0+1} = [x^k]F_{n_0+2} = \dots$.

Pak definujeme $F = \lim_{n\to\infty} F_n := l_0 + l_1x + l_2x^2 + \dots$, kde $l_k = [x^k]F_{n_0+1} = [x^k]F_{n_0+2} = \dots$.

$\sum_{n=1}^{\infty} F_n$ konverguje a má součet F, když

$$\lim_{n\to\infty}(F_1 + F_2 + \dots + F_n) = F.$$

$\boxed{\text{Tvrzení}}$ $\sum_{n=1}^{\infty} F_n$, kde F_n jsou moc. řady, konverguje $\iff \mathrm{ord}(F_n) \to +\infty$ pro $n \to \infty$.

D. Nechť $\mathrm{ord}(F_n) \to +\infty$ a $k \in \mathbb{N}$. Vezmeme n_0, že $n > n_0 \Rightarrow [x^k]F_n = 0$. Tedy, pro $n > n_0$, $[x^k](F_1 + F_2 + \dots + F_n) = [x^k](F_1 + F_2 + \dots + F_{n_0})$ je konstantní.

Nechť $\mathrm{ord}(F_n) \not\to +\infty$. Tedy (holubníkový princip) ex. $k \in \mathbb{N}$ a posl. $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$, že $[x^k]F_{n_i} \neq 0 \; \forall i$. Pak $[x^k](F_1 + \dots + F_{n_i - 1}) \neq [x^k](F_1 + \dots + F_{n_i}) \; \forall i$. $\boxtimes$

Teď už rozumíme rovnosti $\sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n = \sum_{k\geq 0}^{\infty} (x+x^2)^k$

- řada vpravo má $\mathrm{ord}((x+x^2)^k) = k \to +\infty$, takže konverguje a její součet je moc. řada vlevo.

<u>Skládání moc. řad</u> $F(x) = a_0 + a_1 x + \cdots$, $G(x) = b_0 + b_1 x + \cdots$, $F(G) = F \circ G$ definujeme jako součet řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n G^n$, když konverguje.

$\boxed{\text{Tvrzení}}$ $F(G) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n G^n$ konverguje, tj. složenina $F(G)$ je definovaná, $\Longleftrightarrow$ F je polynom nebo $b_0 = [x^0]G = 0$.

D. F poly. $\to$ máme jen konečný součet $a_0 + a_1 G + \cdots + a_k G^k$. $b_0 = 0 \to \mathrm{ord}(G) \geq 1$, takže $\mathrm{ord}(a_n G^n) \geq n$ a řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n G^n$ konverguje. Naopak, nechť F není polynom a $b_0 \neq 0$. Tedy $a_{n_1} \neq 0$, $a_{n_2} \neq 0, \ldots$ kde $n_1 < n_2 < \ldots$ je nekonečná posloupnost. Pak $\mathrm{ord}(a_{n_i} G^{n_i}) = \mathrm{ord}(a_{n_i} b_0^{n_i} + \ldots) = 0 \ \forall i$, takže $\sum_{n=0}^{\infty} a_n G^n$ nekonverguje. $\boxtimes$

$\boxed{\text{Cvičení}}$ Kdy konverguje nekon. součin $\prod_{n=1}^{\infty} F_n$?