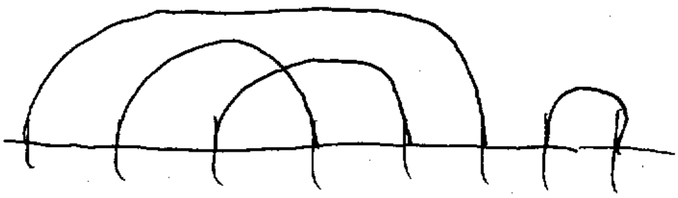
Přednáška 1 | 20. 2. 2008

Tři příklady použití vytvořujících funkcí. (generujících)

(1) Počet nekřížících se párování

Párování: 

na množině vrcholů $[2n] = \{1, 2, \ldots, 2n\}$

nechceme ale křížení hran:  NE!

$M_n = \{n\text{. párování na } [2n]\}$, $m_n = |M_n|$.

$m_0 = 1$, $m_1 = 1$, $m_2 = 2$: .

$m_n = ?$ vzoreček?

$n \geq 1$:  – rozklad n. párování podle první hrany.

$$M_n \cong \bigcup_{i=0}^{n-1} (M_i \times M_{n-i-1})$$

v bijekci s

takže

$$m_0 = 1, \quad m_n = \sum_{i=0}^{n-1} m_i m_{n-i-1} \quad \text{pro } n \geq 1.$$

Proto $m_1 x + m_2 x^2 + \dots = x(m_0 + m_1 x + m_2 x^2 + \dots)^2$

$$M - 1 = xM^2, \text{ kde}$$

$$M = \sum_{n=0}^{\infty} m_n x^n,$$

takže $xM^2 - M + 1 = 0$

a $M = M(x) = \frac{1}{2x}\left(1 \pm \sqrt{1-4x}\right)$. Podle binomické věty $\sqrt{1-4x} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} (-4x)^n =$

$= 1 - 2x - \dots$, takže v $\pm$ volíme $-$:

$M = \frac{1}{2x}\left(1 - \sqrt{1-4x}\right)$ a

$$m_n = -\frac{1}{2}\binom{1/2}{n+1}(-4)^{n+1} = \frac{1}{2}(-1)^n \underbrace{\vphantom{x}}_{4^{n+1}} \frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})\cdots(\frac{1-2n}{2})}{(n+1)!}$$

$$= 2^n \cdot \frac{1\cdot 3\cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{(n+1)!} = 2^n \cdot \frac{(2n)!}{2\cdot 4\cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2n \cdot (n+1)!}$$

$$= \frac{(2n)!}{n!\,(n+1)!} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

Catalanova čísla:

$$\boxed{m_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = 1, 1, 2, 5, 14, 42, \dots}$$

<u>Lepší rekurence</u>: $\dfrac{m_{n+1}}{m_n} = \dfrac{n+1}{n+2}\dfrac{\binom{2n+2}{n+1}}{\binom{2n}{n}} = \dots = \dfrac{4n+2}{n+2}$,

takže $\boxed{m_{n+1} = \dfrac{4n+2}{n+2} m_n \text{ pro } n \geq 0.}$

---

(2) Počet výstupů do schodů

$f_n := \#$ výstupů ~~do~~ schodiště délky n, bereme-li schody po 1 nebo po 2. Takže

$f_0 = 1,\ f_1 = 1,\ f_2 = 2,\ f_3 = 3$:  a

$f_n = \#$ řešení rovnice $n = t_1 + t_2 + \dots + t_k$, kde $t_i \in \{1,2\}$ a k se může měnit.

Proto $F = F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n = \sum_{k=0}^{\infty} (x^1 + x^2)^k$

$$F = \frac{1}{1-(x+x^2)} = \frac{1}{1-x-x^2}.$$ Vzorec pro

f_n dostaneme z rozkladu na parciální zlomky:

$$\frac{1}{1-x-x^2} = \frac{1}{(1-\alpha x)(1-\beta x)} = \frac{a}{1-\alpha x} + \frac{b}{1-\beta x}.$$

Z $1-x-x^2 = (1-\alpha x)(1-\beta x)$ máme $\begin{matrix}\alpha+\beta = 1 \\ \alpha\beta = -1,\end{matrix}$

takže $(x-\alpha)(x-\beta) = x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta = x^2 - x - 1$

a $\alpha = \frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)$, $\beta = \frac{1}{2}(1-\sqrt{5})$, $\alpha - \beta = \sqrt{5}$. Pro

$x \to 1/\alpha$ rovnost $\dfrac{1}{(1-\alpha x)(1-\beta x)} = \dfrac{a}{1-\alpha x} + \dfrac{b}{1-\beta x}$

dává $\dfrac{1}{1-\beta/\alpha} = a$, takže $a = \dfrac{\alpha}{\alpha-\beta} = \dfrac{\alpha}{\sqrt{5}}$. Po-

dobně $b = \dfrac{1}{1-\alpha/\beta} = \dfrac{\beta}{\beta-\alpha} = -\dfrac{\beta}{\sqrt{5}}$. Tedy

$$\sum_{n\geq 0} f_n x^n = \frac{a}{1-\alpha x} + \frac{b}{1-\beta x}$$

$$= a \sum_{n\geq 0} \alpha^n x^n + b \sum_{n\geq 0} \beta^n x^n$$

$$= \sum_{n\geq 0} (a\alpha^n + b\beta^n) x^n \quad \text{a}$$

$$f_n = a\alpha^n + b\beta^n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{n+1} - \beta^{n+1})$$

$$\boxed{= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right).}$$

Čísla $f_n = 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$ jsou Fibonacciova čísla a splňují rekurenci

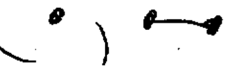
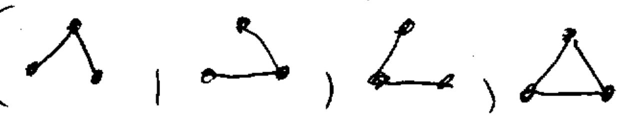
$g_0 = g_1 = 1$, $g_n = g_{n-1} + g_{n-2}$ pro $n \geq 2$, což je vi-
dět přímo kombinatoricky nebo z

$$(1-x-x^2)\sum_{n\geq 0} g_n x^n = 1 \quad (= 1\cdot x^0 + 0\cdot x^1 + 0\cdot x^2 + \dots)$$

$$\underbrace{g_0}_{=1} + \underbrace{(g_1 - g_0)}_{=0}x + \sum_{n\geq 2}\underbrace{(g_n - g_{n-1} - g_{n-2})}_{=0}x^n = 1.$$

---

(3) Počet souvislých grafů

$s_n :=$ # souvislých grafů na $[n]$. Např. $s_1 = s_2 = 1$ () a $s_3 = 4$ ().

Odvodíme vzorec pro posloupnost čísel s_n.

$g_n :=$ # všech grafů na $[n]$ $= 2^{\binom{n}{2}} = 2^{n(n-1)/2}$.

$$S = S(x) := \sum_{n\geq 0}\frac{s_n x^n}{n!},\quad G = G(x) := \sum_{n\geq 0}\frac{g_n x^n}{n!}$$

$s_0 = 0$, $g_0 = 1$ – exponenciální generující funkce.

„Graf je kolekce souvislých grafů"

$$\Longrightarrow G(x) = e^{S(x)}$$

(dokážeme v obecnosti později).

Takže $G' = S' e^S = S' G$

$\boxed{G' = S' G}$. Porovnáme koef. u x^n na obou stranách:

$$\frac{g_{n+1}(n+1)}{(n+1)!} = \frac{g_{n+1}}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{s_{k+1}}{k!} \cdot \frac{g_{n-k}}{(n-k)!}$$

$$g_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} s_{k+1} g_{n-k}$$

$$s_{n+1} = g_{n+1} - \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} s_{k+1} g_{n-k}$$

$$= g_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} g_{n-k+1} s_k \text{, to jest}$$

$$\boxed{s_{n+1} = 2^{\binom{n+1}{2}} - \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} 2^{\binom{n-k+1}{2}} s_k, \quad n \geq 0}$$

$$s_4 = 2^6 - \sum_{k=1}^{3} \binom{3}{k-1} 2^{\binom{4-k}{2}} s_k \qquad \begin{array}{c} s_1 = s_2 = 1 \\ s_3 = 4 \end{array}$$

$$= 64 - (1 \cdot 2^3 \cdot 1 + 3 \cdot 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 \cdot 4)$$

$$= \underline{38}.$$