Mocninné řady v kombinatorické enumeraci

Martin Klazar

Katedra aplikované matematiky (KAM)
a
Institut teoretické informatiky (ITI)
MFF UK Praha

Přehled

- Matematické aspekty mocninných řad
- Hierarchie 4 tříd mocninných řad v kombinatorické enumeraci:
  - Racionální
  - Algebraické
  - D-konečné
  - Diferenciálně algebraické
- Mocninné řady v přírodních i jiných vědách

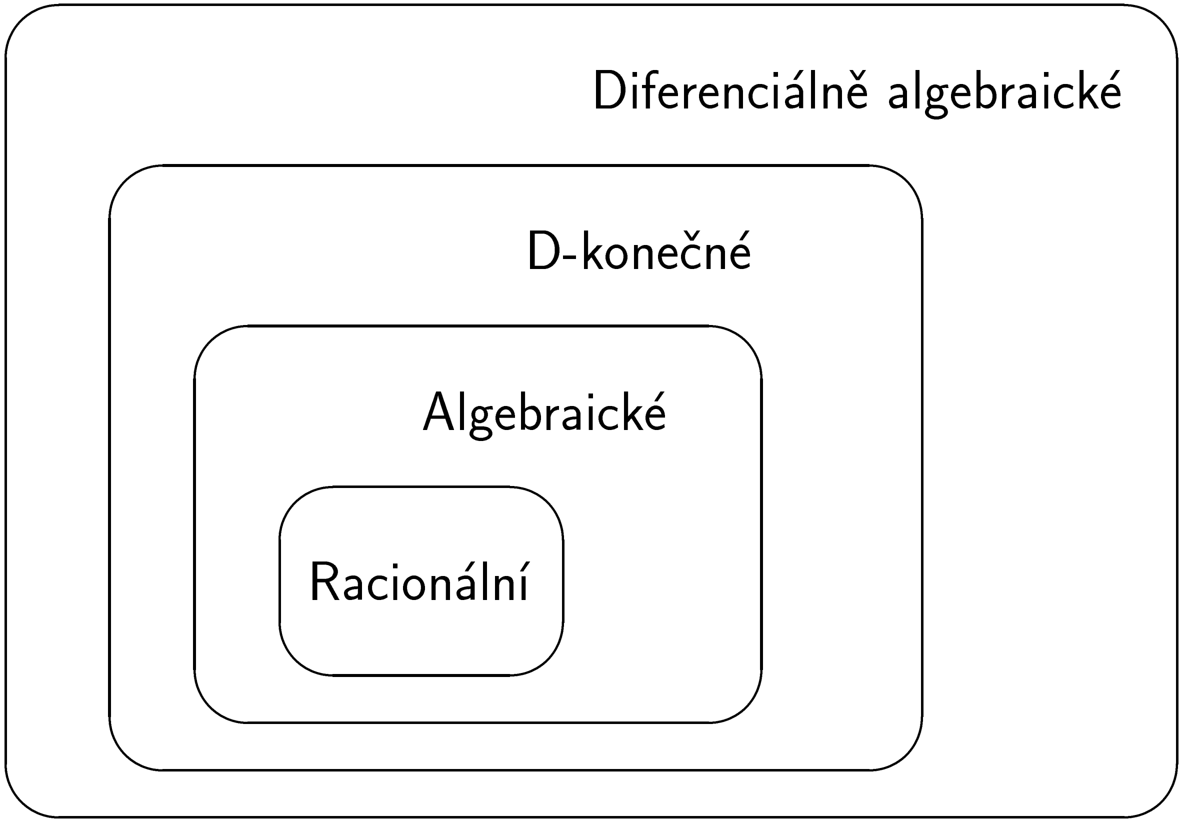
Matematické aspekty mocninných řad

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots, \quad a_n \in \mathbf{C}.$$

$F(x)$ je **generující funkce** (gf) posloupnosti $(a_0, a_1, \ldots)$.

1. matematická analýza (funkce komplexní proměnné, řešení diferenciálních rovnic)
2. teorie pravděpodobnosti (diskrétní rozdělení, náhodné procházky)
3. teorie čísel (aditivní teorie čísel)
4. algebraická geometrie (lokální parametrizace křivek)
5. diskrétní matematika (diskrétní pravděpodobnost, analýza algoritmů, **kombinatorická enumerace**: a_n je počet nějakých struktur velikosti n)
6. teoretická informatika (teorie formálních jazyků)
7. algebra a logika (moc. řady jsou zajímavé objekty i samy o sobě)

Čtyři třídy mocninných řad



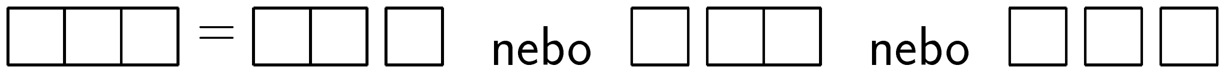
Racionální mocninné řady

$F = F(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$ je **racionální**, pokud splňuje lineární rovnici

$$QF - P = 0$$

s polynomiálními koeficienty $P(x)$ a $Q(x)$, tj. $F(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$.

Fibonacciova čísla. $F_n =$ počet rozlomení obdélníku $1 \times n$ na kousky 1×1 a 1×2. Např. $F_3 = 3$, protože

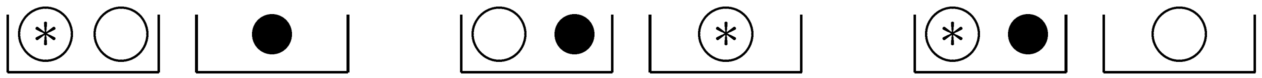


Vlastnosti Fibonacciových čísel:

- $F_0 + F_1 x + F_2 x^2 + \cdots = \dfrac{1}{1 - x - x^2} \quad \left(= \dfrac{1}{(1 - \alpha x)(1 - \beta x)} \right).$
- Pro $n \geq 2$ platí $F_n - F_{n-1} - F_{n-2} = 0$, $F_0 = F_1 = 1$.
- $F_n = A\alpha^n + B\beta^n$, kde $A = \frac{5+\sqrt{5}}{10}$, $B = \frac{5-\sqrt{5}}{10}$, $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \doteq 1.61803$ a $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \doteq -0.61803$.

Racionální mocninné řady

Stirlingova čísla. $S(n,k) =$ počet rozkladů $\{1,2,\ldots,n\}$ na k bloků $= \#$ rozmístění n označených míčů do k neoznačených uren, do každé přijde alespoň jeden. Např. $S(3,2) = 3$:



Pro každé pevné k platí:

- $\Sigma_{n=0}^{\infty} S(n,k)x^n = \dfrac{x^k}{(1-x)(1-2x)\ldots(1-kx)}$.
- $S(n,k) = A_k k^n + A_{k-1}(k-1)^n + \cdots + A_1 1^n$, kde $A_i = \frac{(-1)^{k-i}}{i!(k-i)!}$.

M. K. (2000): Je-li $\mathcal{P}$ třída rozkladů s $\leq k$ bloky, uzavřená na podrozklady, a a_n je počet rozkladů množiny $\{1,2,\ldots,n\}$ ležících v $\mathcal{P}$, pak

$$\Sigma_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \frac{P(x)}{(1-x)^{m_1}(1-2x)^{m_2}\ldots(1-kx)^{m_k}},$$

kde P je celočíselný polynom a $m_i \in \mathrm{IN}_0$.

Racionální mocninné řady

Hlavní věta o racionálních mocninných řadách. Následující vlastnosti jsou vzájemně ekvivalentní:

- $\Sigma\ a_n x^n$ je racionální.
- $(a_0, a_1, \ldots)$ splňuje lineární rekurenci s konstantními koeficienty, tj. $a_n + c_1 a_{n-1} + \cdots + c_r a_{n-r} = 0$ pro $n \geq n_0$.
- $a_n = A_1(n)\alpha_1^n + A_2(n)\alpha_2^n + \cdots + A_k(n)\alpha_k^n$ pro $n \geq n_0$, kde $\alpha_i \in \mathbf{C}$ a A_i jsou polynomy.

Metoda přechodové matice. $C(x) = \Sigma\ c_n x^n$, kde c_n je počet slov délky n nad $\{a, b\}$, která začínají i končí a a nemají dvě a vedle sebe. Pak $c_n =$ počet "procházek" délky n z a do a v or. grafu

$$\begin{tikzcd} \mathrm{a} \arrow[r, shift left] & \mathrm{b} \arrow[l, shift left] \arrow[loop right] \end{tikzcd} .$$

Přechodová matice je $P = \begin{pmatrix} 0 & x \\ x & x \end{pmatrix}$.

Vidíme, že $C(x)$ je položka 1,1 v 2×2 matici $I + P + P^2 + \cdots = (I - P)^{-1}$. Takže $C(x)$ je racionální. Obecně podobně. Metoda má mnoho použití ve fyzice a teorii pravděpodobnosti.

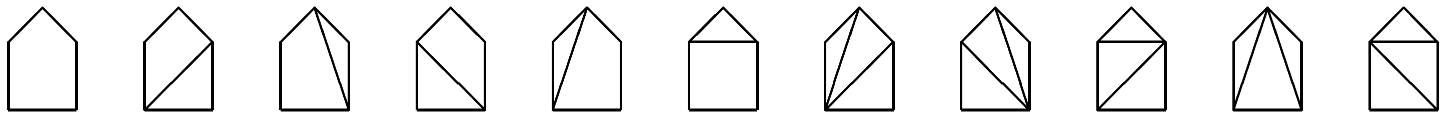
Algebraické mocninné řady

$F = F(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots$ je **algebraická**, pokud splňuje algebraickou rovnici

$$Q_kF^k + Q_{k-1}F^{k-1} + \cdots + Q_1F + Q_0 = 0$$

s polynomiálními koeficienty $Q_0(x), \ldots, Q_k(x)$, kde $Q_k(x) \neq 0$.

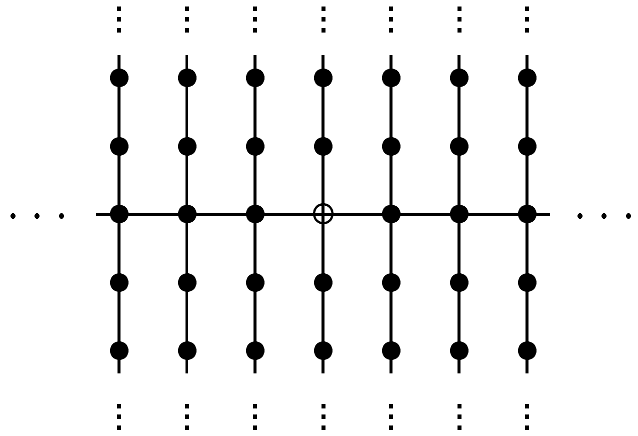
Schröderova čísla. S_n = počet systémů nekřížících se úhlopříček v konvexním $n+2$-úhelníku. Např. $S_3 = 11$:



Řada $F(x) = \Sigma_{n=1}^{\infty} S_n x^{n+1} = x^2 + 3x^3 + 11x^4 + 45x^5 + \cdots$ splňuje

- kvadratickou rovnici $2xF^2 + (3x-1)F + x = 0$ a
- diferenciální rovnici $(1-6x+x^2)F' - (x-3)F - 2x = 0$.
- Pro $n \geq 2$ platí $(n+1)S_n - (6n-3)S_{n-1} + (n-2)S_{n-2} = 0$, $S_1 = 1$ a $S_0 = 0$.

Náhodná procházka v hřebenovém grafu. Nechť p_n je pravděpodobnost, že jednoduchá náhodná procházka v dolejším nekonečném grafu začne v počátku ($\circ$) a po n krocích se opět nachází v počátku.



Jak ukázal P. Gerl (1986),

$$G(z) = \Sigma_{n=0}^{\infty} p_n z^n = \sqrt{\frac{2}{1 - z^2 + \sqrt{1 - z^2}}}$$

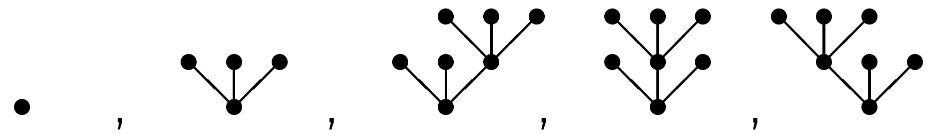
a $p_{2n} \sim n^{-3/4}/(\sqrt{2} \cdot \Gamma(1/4)),\ n \to \infty.$

Algebraické mocninné řady

Łukasiewiczův jazyk. Jazyk $\mathcal{L}$ nad abecedou $\{a, b\}$, definovaný rovnicí

$$\mathcal{L} = (\{a\} \cdot \mathcal{L} \cdot \mathcal{L} \cdot \mathcal{L}) \cup \{b\}.$$

Prvních pár slov: $\mathcal{L} = \{b, abbb, abbabbb, ababbbb, aabbbbb, \ldots\}$. Obrázkem:

$\mathcal{L} =$  $, \ldots$

Položíme-li $l_n = \#\{w \in \mathcal{L} : \ |w| = n\}$ a $L(x) = \Sigma\, l_n x^n$, platí rovnice $L(x) = xL(x)^3 + x$ a proto je $L(x)$ algebraická.

Význam této třídy.

- N. Chomsky a M. Schützenberger (1963): bezkontextové jazyky $\Rightarrow$ algebraické systémy pro jejich gf $\Rightarrow$ gf jsou algebraické. Mnoho komb. struktur lze zakódovat do bezkontextového jazyka.
- Propracované techniky pro asymptotiku koeficientů užívající komplexní analýzu (P. Flajolet, A. Odlyzko, ...).

D-konečné mocninné řady

$F = F(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots$ je **D-konečná**, pokud splňuje lineární diferenciální rovnici

$$P_{k+1}F^{(k)} + \cdots + P_2F' + P_1F + P_0 = 0$$

s polynomiálními koeficienty $P_0(x), \ldots, P_{k+1}(x)$, kde $P_{k+1}(x) \neq 0$. (Jinak řečeno, derivace $F, F', F'', \ldots$ jsou lineárně závislé nad $\mathbf{C}(x)$.) **Ekvivalentní definice v řeči koeficientů.** Posloupnost $(a_0, a_1, \ldots)$ se nazývá **P-rekurzivní**, pokud se pro $n \geq n_0$ splňuje rekurence

$$P_0(n)a_n + P_1(n)a_{n-1} + \cdots + P_r(n)a_{n-r} = 0,$$

kde $P_0, \ldots, P_r$, $P_0 \neq 0$, jsou polynomy. Potom

$$\Sigma\ a_nx^n \text{ je D-konečná} \iff (a_0, a_1, \ldots) \text{ je P-rekurzivní.}$$

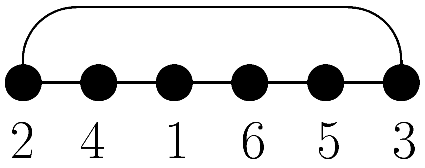
Příklady. Gf Schröderových čísel je D-konečná. Protože $n! - n \cdot (n-1)! = 0$, je i $\Sigma\ n!x^n$ D-konečná (a není algebraická). Platí

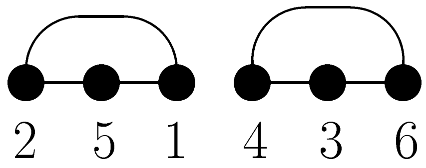
$$\Sigma\ a_nx^n \text{ je algebraická} \Longrightarrow \Sigma\ a_nx^n \text{ je D-konečná.}$$

D-konečné mocninné řady

Význam této třídy. $\Sigma\ a_n x^n$ D-konečná $\Rightarrow$ pro a_n máme pěknou rekurenci. Uzavřená na řadu operací ($+$, $\times$, F je D-kon. $\&$ G je algebr. $\Rightarrow F(G)$ je D-kon., Hadamardův součin, diagonála).

Regulární grafy. Nechť $g_k(n)$ je počet k-regulárních (=každý vrchol má k sousedů) grafů na množině $\{1, 2, \ldots, n\}$. Např. $g_2(6) = 70$:

$\frac{6!}{2 \cdot 6} = 60\times$ 

$+ \quad \frac{1}{2}\binom{6}{3} = 10\times$ 

I. Gessel (1990): Pro každé pevné k je $\Sigma\ g_k(n)x^n$ D-konečná.

Omezené permutace. Nechť $p_k(n)$ je počet permutací čísel $1, 2, \ldots, n$ neobsahujících rostoucí podposloupnost délky k. Např. $p_3(3) = 3! - 1 = 5$ a obecně $p_3(n) = \binom{2n}{n}/(n+1)$.

I. Gessel (1990) a D. Zeilberger (1990): Pro každé pevné k je $\Sigma\ p_k(n)x^n$ D-konečná. (Pro $k \geq 4$ není algebraická.) A. Regev (1981):

$$p_k(n) \sim c_k \cdot n^{(2k-k^2)/2} \cdot (k-1)^{2n}, \quad n \to \infty.$$

Diferenciálně algebraické mocninné řady

$F = F(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$ je **diferenciálně algebraická**, pokud jsou její derivace $F, F', F'', \ldots$ algebraicky závislé nad $\mathbf{C}(x)$, tj.

$$P(x, F, F', F'', \ldots, F^{(k)}) = 0$$

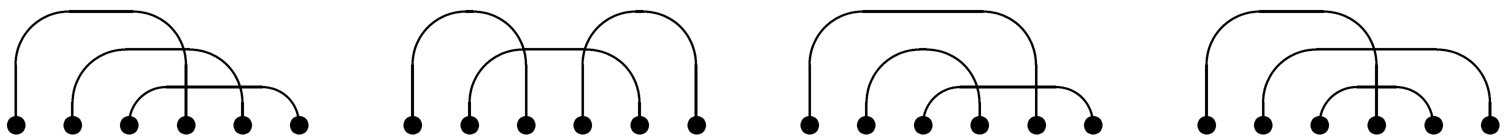
pro nějaký nenulový polynom $P(x, y_0, y_1, y_2, \ldots, y_k)$.

Theta funkce. C. Jacobi (1847): Mocninná řada

$$\Sigma\, x^{n^2} = 1 + x^1 + x^4 + x^9 + \cdots$$

je dif. algebraická. (Protože posloupnost $(1, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, \ldots)$ není P-rekurzivní, $\Sigma\, x^{n^2}$ není D-konečná.)

Křížící se párování. Nechť k_n je počet rozkladů $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ na n dvouprvkových hran, v nichž každá hrana kříží nějakou jinou hranu. Např. $k_3 = 4$:



Diferenciálně algebraické mocninné řady

M. K. (2003): $K(x) = \Sigma\, k_n x^n = 1 + x^2 + 4x^3 + 31x^4 + 288x^5 + \cdots$
splňuje diferenciální rovnici prvního řádu

$$K' = \frac{-x^2K^3 + K - 1}{2x^3K^2 + 2x^2K}$$

— je tedy dif. algebraická — a není D-konečná.

Bellova čísla. B_n je počet všech rozkladů množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$ (na neprázdné disjunktní podmnožiny). Např. $B_3 = 5$:

$$1 \mid 2 \mid 3, \quad 1\,2 \mid 3, \quad 1 \mid 2\,3, \quad 1\,3 \mid 2, \quad 1\,2\,3.$$

Klasický výsledek o exponenciální gf Bellových čísel:

$$B_e(x) = \Sigma_{n=0}^{\infty}\, B_n x^n/n! = \mathrm{e}^{\mathrm{e}^x - 1}.$$

Protože $\mathrm{e}^x = (B_e'/B_e)' = B_e'/B_e$, máme pro $B_e(x)$ alg. dif. rovnici

$$B_e''B_e - (B_e')^2 - B_e'B_e = 0.$$

Na druhou stranu se stejně lehce ukáže, že $B_e(x)$ není D-konečná.

Diferenciálně algebraické mocninné řady

M. K. (2003): Obyčejná gf Bellových čísel

$$B(x) = \Sigma\, B_n x^n = 1 + x + 2x^2 + 5x^3 + 15x^4 + 52x^5 + \cdots$$

není diferenciálně algebraická. (reprinty. . .)
Což ale pro $B(x)$ nevylučuje jiné pěkné vztahy. Platí třeba identita $B(x/(1+x)) = 1 + xB(x)$ nebo, jak ukázal P. Flajolet (1980),

$$B(x) = \cfrac{1}{1 - x - \cfrac{x^2}{1 - 2x - \cfrac{2x^2}{1 - 3x - \cfrac{3x^2}{\vdots}}}}.$$

Význam této třídy. Spíše záležitost algebry a teorie čísel. Obecnost a pěkné algebraické uzávěrové vlastnosti. D. Hilbert a V. Stadigh (1902): $\zeta(s)$ není dif. algebraická. L. Lipshitz a L. Rubel (1986): $\Sigma\, a_i x^{n_i}$, kde $0 \le n_1 < n_2 < \ldots$ a $a_i \neq 0$, je dif. alg. $\Rightarrow \liminf n_{i+1}/n_i = 1$.

Mocninné řady v přírodních i jiných vědách

Experiment s vyhledáváním v internetové databázi SCIENCE DIRECT obsahující přes 1700 vědeckých časopisů.

Dotaz "power series" vrací 1324 článků (1000 v období 1985–2003).
Dotaz "generating function" vrací 1250 článků.

Časopisy (namátkou): *Advances in Mathematics, Chemical Physics Letters, Composite Structures, Discrete Mathematics, Fluid Phase Equilibria, Fuzzy Sets and Systems, Historia Mathematica, Information Processing Letters, Insurance: Mathematics and Economics, International J. of Pressure Vessels and Piping, J. of Aerosol Science, J. of Crystal Growth, J. of Number Theory, J. of Petroleum Science, Microelectronics and Reliability, Neurocomputing, Nuclear Physics B, Ocean Engineering, Optics Communications, Performance Evaluation, Solar Energy Materials and Solar Cells, Stochastic Processes and their Applications, Tectonophysics, Theoretical Computer Science, Theoretical Population Biology, Vacuum, Vistas in Astronomy.*

Mocninné řady v přírodních i jiných vědách