

Cvičení 9, 27. 11. 2013

Příklady

1. Pro $x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ funkci

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

(střed $x_0 = 0$) vyjádřete součtem mocninné řady se středem v $x_0 = \frac{1}{2}$.
Jaké jsou poloměry konvergence obou mocninných řad?

- 2.

$$\frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{4 \cdot 5} + \dots = ???$$

3. Spočtěte limitu

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n} \frac{x^n}{x^n + 1}.$$

4. Z $\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots$ odvoďte, že $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$.

Domácí úkoly — lhůta pro odevzdání je 4. 12. do 12:00

1. (4 body) Dokažte, že funkce $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ je definovaná na $(1, +\infty)$ a má tam derivace všech řádů.
2. (4 body)

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} - \frac{1}{4 \cdot 5 \cdot 6} + \dots = ???$$

Odpověď zdůvodněte.

3. (4 body) Nalezněte poloměr konvergence následující mocninné řady. Jak je to s konvergencí v krajních bodech intervalu konvergence? Návod: Stirlingova aproximace faktoriálu.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} x^n.$$