Cvičení 8, 20. 11. 2013

Příklady

1. Uveďte 4 příklady mocninných řad $\sum a_n x^n$ s poloměrem konvergence R, $0 < R < +\infty$, odpovídající čtyřem možnostem (ne)konvergence ve dvou bodech $x = -R$ a $x = R$.

2. Ano nebo ne: existují dvě mocninné řady $\sum a_n x^n$ a $\sum b_n x^n$ lišící se jen v konečně mnoha koeficientech, které mají různé poloměry konvergence.

3. Ano nebo ne: když $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \rightrightarrows$ na M, pak i $\sum_{n=1}^{\infty} f_{2n} \rightrightarrows$ na M.

4. Ano nebo ne: když $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \rightrightarrows$ na M podle Weierstrassova kritéria, pak i $\sum_{n=1}^{\infty} f_{2n} \rightrightarrows$ na M podle Weierstrassova kritéria.

5. Spočtěte následující limity.

   (a) $\lim_{x\to 1^-} \sum_{n\geq 1}(x^n - x^{n+1})$

   (b) $\lim_{x\to 1^-} \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n} \frac{x^n}{x^n+1}$

   (c) $\lim_{x\to 0^+} \sum_{n\geq 1} \frac{1}{2^n n^x}$

Domácí úkoly (po 3 bodech) — lhůta pro odevzdání je 27. 11. do 12:00

1. Ano nebo ne: Když $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je taková posloupnost funkcí, že $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_\infty = +\infty$, potom řada funkcí $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ nekonverguje na $\mathbb{R}$ stejnoměrně. Odpověď zdůvodněte. (Obrácení Weierstrassova kritéria.)

2. Nechť $\sum a_n x^n$ a $\sum b_n x^n$ jsou mocninné řady s poloměry konvergence R a S, a $\sum (a_n + b_n) x^n$ má poloměr konvergence T. Jaká platí nerovnost mezi čísly R, S a T? Odpověd zdůvodněte.

3. Nalezněte poloměr konvergence následujících mocninných řad. Jak to je s konvergencí v krajních bodech intervalu konvergence?

   (a) $\sum_{n\geq 1} x^n/n$

   (b) $\sum_{n\geq 0} 4^n x^{2n}$

   (c) $\sum_{n\geq 1} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n}}{n 2^n}$