6. cvičení z MAI (5. 11. 2014)

Příklady

1. Nechť $(f_n) = (1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots)$ jsou Fibonacciova čísla ($f_1 = f_2 = 1$, $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ pro $n > 2$). Dokažte, že existuje vlastní $\lim(f_n/f_{n-1})$.
2. $\lim(3^n + (-3)^n)/4^n = ?$
3. Pro dané reálné q, $\lim_{n\to\infty} q^n/n^q = ?$ Podobně $\lim_{n\to\infty}(q^n - n^q) = ?$
4. $\lim(\sqrt{2}\sqrt[4]{2}\sqrt[8]{2}\dots\sqrt[2^n]{2}) = ?$
5. $\lim \sqrt[n]{a^n + b^n + c^n} = ?$ $a, b, c > 0$ jsou pevná reálná čísla.
6. Řekněme, že víme, že $\lim(1 + 1/n)^n = e = 2.718\dots$. Jak odtud plyne, že $\lim(1 - 1/n)^n = e^{-1}$ a $\lim(1 + 1/2n)^n = \sqrt{e}$?

Domácí úkoly (po 3 bodech) — lhůta pro odevzdání je 11. 11. do 15:00

1. Nalezněte množinu H hromadných bodů posloupnosti (a_n), kde $a_n = (2014 \cdot 2^n + (-3)^n)/n$. Odpověď zdůvodněte.
2. Spočtěte $\lim_{n\to\infty}(n+3)!/n^n$, kde $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n$. Odpověď zdůvodněte.
3. Nechť $(a_n), (b_n) \subset \mathbb{R}$ jsou dvě posloupnosti, přičemž $\lim a_n = a \in \mathbb{R}$ (vlastní limita) a $\lim b_n$ neexistuje. Co se dá říci o limitách $\lim(a_n + b_n)$ a $\lim(a_n b_n)$? Odpověď zdůvodněte.