Cvičení 5, 30. 10. 2013

Příklady

1. Jsou euklidovské prostory $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}^2$ homeomorfní?

2. Úloha na lámání hlavy pro zájemce (na cvičení to nevyřešíme). Nechť je MP (M, d) obloukově souvislý, takže pro každé dva body $a, b \in M$ existuje spojité zobrazení $f : [0, 1] \to M$ s $f(0) = a$ a $f(1) = b$. Dokažte, že pak existuje takové zobrazení f, jež je navíc prosté.

3. Je průnik dvou úplných podmnožin v MP-u úplná množina? A co rozdíl?

4. Dokažte, že kompaktní podmnožina v MP-u je úplná.

5. Jak vypadají otevřené podmnožiny $X \subset \mathbb{R}$ (euklidovská metrika), které jsou úplné?

6. Ano nebo ne: jsou-li dvě funkce $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kontrahující (euklidovská metrika), potom je i jejich součtová funkce $f + g$ kontrahující.

Domácí úkoly (po 3 bodech) — lhůta pro odevzdání je 6. 11. do 12:00

1. Nechť X a Y jsou dvě úplné podmnožiny v MP (M, d). Rozhodněte, zda jejich sjednocení $X \cup Y$ je úplná podmnožina a odpověď zdůvodněte.

   Řešení. Ano, je. Když $A = (a_n) \subset X \cup Y$ je libovolná cauchyovská posloupnost, pak A má (nekonečnou) podposloupnost A' danou indexy $1 \le k_1 < k_2 < \ldots$, že celá $A' = (a_{k_n})$ leží v X nebo v Y. Řekněme, že $A' \subset Y$ (případ $A' \subset X$ je podobný). A' je cauchyovská (zdědila to z A) a Y je úplná, takže $\lim a_{k_n} = a \in Y$. Protože celá A je cauchyovská a má podposloupnost s limitou a, (jednoduché odhady ukazují, že) je a limitou i celé posloupnosti A. Ovšem $a \in Y$, tedy $a \in X \cup Y$.

2. Které z následujících podmnožin $\mathbb{R}^3$ jsou úplné a proč: a) rovina xy (tj. body se souřadnicí $z = 0$), b) přímka bez jednoho bodu daná rovnicemi $x = y = 0$, $z \neq 1$, c) $\{(0, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 0, 2), \ldots\}$.

   Řešení. a) je úplná, je to uzavřená podmnožina (doplněk je otevřený, bod mimo rovinu leží mimo ni s malou koulí kolem něj) úplného prostoru. b) není úplná, body na přímce limitící k vypuštěnému bodu tvoří nekonvergentní cauchyovskou posloupnost. c) je úplná, opět je to uzavřená podmnožina úplného prostoru.

3. Je zobrazení $f(x) = x^2 : (0, \frac{1}{2}) \to (0, \frac{1}{2})$ (vzhledem k euklidovské metrice v $\mathbb{R}$) kontrahující? Odpověď zdůvodněte.

Řešení. Ne, není. Protože $z = |f(x) - f(y)|/|x - y| = |x + y|$, pro různé $x, y \in (0, \frac{1}{2})$ a blízké k $\frac{1}{2}$ se podíl z přibližuje libovolně blízko zdola k 1 a z nelze shora omezit konstantou menší než 1.