

Cvičení 5, 30. 10. 2013

Příklady

1. Jsou euklidovské prostory \mathbb{R} a \mathbb{R}^2 homeomorfní?
2. Úloha na lámání hlavy pro zájemce (na cvičení to nevyřešíme). Nechť je MP (M, d) obloukově souvislý, takže pro každé dva body $a, b \in M$ existuje spojitě zobrazení $f : [0, 1] \rightarrow M$ s $f(0) = a$ a $f(1) = b$. Dokažte, že pak existuje takové zobrazení f , jež je navíc prosté.
3. Je průnik dvou úplných podmnožin v MP-u úplná množina? A co rozdíl?
4. Dokažte, že kompaktní podmnožina v MP-u je úplná.
5. Jak vypadají otevřené podmnožiny $X \subset \mathbb{R}$ (euklidovská metrika), které jsou úplné?
6. Ano nebo ne: jsou-li dvě funkce $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ kontrahující (euklidovská metrika), potom je i jejich součtová funkce $f + g$ kontrahující.

Domácí úkoly (po 3 bodech) — lhůta pro odevzdání je 6. 11. do 12:00

1. Nechť X a Y jsou dvě úplné podmnožiny v MP (M, d) . Rozhodněte, zda jejich sjednocení $X \cup Y$ je úplná podmnožina a odpověď zdůvodněte.
2. Které z následujících podmnožin \mathbb{R}^3 jsou úplné a proč: a) rovina xy (tj. body se souřadnicí $z = 0$), b) přímka bez jednoho bodu daná rovnicemi $x = y = 0, z \neq 1$, c) $\{(0, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 0, 2), \dots\}$.
3. Je zobrazení $f(x) = x^2 : (0, \frac{1}{2}) \rightarrow (0, \frac{1}{2})$ (vzhledem k euklidovské metrice v \mathbb{R}) kontrahující? Odpověď zdůvodněte.