5. cvičení z MAI (29. 10. 2014)

Příklady

1. Nechť $a_n, b_n \in \mathbb{R}$, existují vlastní limity $\lim a_n = a$, $\lim b_n = b$, pro každé n je $a_n \le b_n$ a tato nerovnost platí pro nekonečně mnoho n jako rovnost. Co lze říci o vztahu a a b?

2. Nechť $(f_n) = (1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots)$ jsou Fibonacciova čísla ($f_1 = f_2 = 1$, $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ pro $n > 2$). Nalezněte $\lim(f_n/f_{n-1})$.

3. Uveďte příklady dvou posloupností, že $\lim a_n = \lim b_n = +\infty$ a $\lim(a_n/b_n)$ je (i) $+\infty$, (ii) reálné číslo a, (iii) $-\infty$ a (iv) nic — neexistuje.

4. $\lim \cos((-1)^n) =?$, $\lim(\cos(-1))^n =?$, $\lim(-1)^{n!+5} =?$

5. $\lim \frac{2n^2+4n}{n\cos n+(2n-\sin n)^2} =?$

6. $\lim \sqrt[n]{a^n + b^n + c^n} =?$; $a, b, c > 0$ jsou pevná reálná čísla.

7. Řekněme, že víme, že $\lim(1 + 1/n)^n = e = 2.718\dots$. Pak $\lim(1 - 1/n)^n =?$ a $\lim(1 + 1/2n)^n =?$

Domácí úkoly (po 3 bodech) — lhůta pro odevzdání je 4. 11. do 15:00

1. Dokažte, že $\lim_{n\to\infty} \sin(n)$ neexistuje.

2. Nechť $p(x)$ a $q(x)$ jsou dva polynomy s reálnými koeficienty (např. $p(x) = 5x^3 - \sqrt{2}x + 1$ a $q(x) = x^{10}$). Popište a zdůvodněte, jak vypadá $\lim_{n\to\infty} \frac{p(n)}{q(n)}$ v závislosti na $p(x)$ a $q(x)$.

3. Stejná úloha, ale pro limitu $\lim_{n\to\infty} \frac{p(1/n)}{q(1/n)}$.