4. cvičení z MAI (22. 10. 2014)

Příklady

1. Příklady, které jsme na minulém cvičení nestihli: falešný důkaz indukcí tvrzení o přímkách v rovině, důkaz odhadu počtu kořenů polynomu indukcí, (ne)zachovávání injektivity a surjektivity při skládání funkcí, konečné uspořádané těleso a další.

2. Nechť $(a_n) \subset \mathbb{R}$. Je pravda, že $\lim a_n = +\infty$, právě když $\lim(1/a_n) = 0$? (Konečně mnoho nedefinovaných podílů ignorujeme.)

3. Uveďte příklad takových posloupností $(a_n), (b_n) \subset \mathbb{R}$, že ani $\lim a_n$ ani $\lim b_n$ neexistuje, ale $\lim(a_n + b_n) = 5$.

4. Uveďte příklad takových posloupností $(a_n), (b_n) \subset \mathbb{R}$, že $\lim a_n = +\infty$ a $\lim b_n = -\infty$ a limita $\lim(a_n + b_n) = 5$. Respektive se rovná $+\infty$, respektive $-\infty$.

5. Uveďte příklad takových posloupností $(a_n), (b_n) \subset \mathbb{R}$, že $\lim a_n = +\infty$ a $\lim b_n = -\infty$ a limita $\lim(a_n b_n) = 5$. Respektive se rovná $+\infty$, respektive $-\infty$.

6. $\lim(\sqrt{n+3} - \sqrt{n}) =?$ a $\lim((n+3)^2 - n^2) =?$

7. Je pravda, že když $a_n, b_n > 0$ a $\lim a_n = \lim b_n = 0$, pak i $\lim a_n^{b_n} = 0$?

Domácí úkoly (po 3 bodech) — lhůta pro odevzdání je 28. 10. do 15:00

1. Uvažme lineární uspořádání $(\mathbb{R}^*, <)$, kde $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ a $<$ je obvyklé uspořádání na reálných číslech, rozšířené o $-\infty < a < +\infty$ pro každé $a \in \mathbb{R}$. Dokažte, že každá podmnožina $X \subset \mathbb{R}^*$ má v $\mathbb{R}^*$ infimum i supremum.

2. Nechť $(a_n), (b_n) \subset \mathbb{R}$ jsou dvě posloupnosti, přičemž (a_n) je omezená (shora i zdola) a $\lim b_n = 0$. Dokažte, že pak i $\lim a_n b_n = 0$.

3. (5 bodů) Dokažte, že když pro $(a_n) \subset \mathbb{R}$ je $\lim a_n = a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, pak i $\lim(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)/n = a$.