Cvičení 3, 16. 10. 2013

Příklady

1. Nechť $X = \{\frac{1}{n} \mid n = 1, 2, \dots\} \cup \{0\}$ je množina v euklidovském prostoru $\mathbb{R}$. Popište její vnitřní, vnější, hraniční, limitní a izolované body.
2. Je prostor
$$X = (\{0\} \times [-1, 1]) \cup \{(x, \sin(1/x)) \mid 0 < x < 1)\} \subset \mathbb{R}^2$$
(s euklidovskou metrikou roviny) souvislý?
3. Jaké souvislé podmnožiny obsahuje diskrétní metr. prostor (v němž jsou všechny vzdálenosti 0 nebo 1)?
4. Dokažte nebo vyvraťte: sjednocení dvou souvislých množin je souvislá množina. Totéž pro průnik.
5. Jsou intervaly $(0, 1)$ a $(0, +\infty)$ (jako euklidovské prostory) homeomorfní?
6. Jsou euklidovské prostory $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}^2$ homeomorfní?

Domácí úkoly (po 3 bodech) — lhůta pro odevzdání je do 12:00 23. 10.

1. Jsou intervaly $[0, 1)$ a $(0, 1)$ (jako euklidovské prostory) homeomorfní?

   Řešení. Ne, nejsou. Interval $[0, 1)\setminus\{0\} = (0, 1)$ je souvislý a jeho obraz v případném homeomorfismu f z $[0, 1)$ do $(0, 1)$ by musela být souvislá množina, ale množina $(0, 1)\setminus\{f(0)\}$ je vždy nesouvislá. Jiné řešení je toto. Homeomorfismus f je prostá spojitá funkce, tedy (podle věty o nabývání mezihodnot) je na intervalu $[0, 1)$ rostoucí nebo klesající. Pak $f(0)$ je nejmenší nebo největší prvek obrazu $f([0, 1))$, což tedy nemůže být interval $(0, 1)$.

2. Nechť A a B jsou dvě souvislé množiny v metrickém prostoru, které se protínají (tj. $A \cap B \neq \emptyset$). Dokažte, že $A \cup B$ je souvislá množina.

   Řešení. Nechť $A \cup B = X \cup Y$, kde X, Y jsou dvě otevřené množiny v $A \cup B$ a $X \cap Y = \emptyset$. Ukážeme, že X nebo Y je prázdná. Z definice otevřené množiny snadno plyne, že průniky $X_A = X \cap A$ a $Y_A = Y \cap A$ jsou otevřené množiny v A. Tyto množiny jsou disjunktní a jejich sjednocení je A. Protože A je souvislá, je některá z těchto množin, např. X_A, prázdná. Podobně je některá z množin $X_B = X \cap B$ a $Y_B = Y \cap B$ prázdná. Když je Y_B prázdná, pak $A \subset Y$ a $B \subset X$, tedy $A \cap B = \emptyset$, ve sporu s předpokladem. Takže je X_B prázdná. To znamená, že celá množina $X = X_A \cup X_B$ je prázdná.

3. Nechť $X = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| = 1 - \frac{1}{n}, n = 1, 2, \dots\}$ je množina v euklidovské rovině $\mathbb{R}^2$ (kde $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ je euklidovská norma, čili vzdálenost od počátku $(0,0)$). Popište její vnitřní, vnější, hraniční, limitní a izolované body.

Řešení. Množina X se skládá z počátku a kružnic se středem v něm a poloměrech $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots$, které limití ke kružnici $L = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| = 1\}$. Takže
vni. b. $X = \emptyset$,
vně. b. $X = \mathbb{R}^2 \backslash (X \cup L)$,
hra. b. $X = X \cup L$,
lim. b. $X = (X \backslash \{(0,0)\}) \cup L$,
izo. b. $X = \{(0,0)\}$.
Je třeba si jen všimnout, že každé okolí každého bodu na L protíná X a že body ležící mimo X a L tuto vlastnost nemají.