3. cvičení z MAI (15. 10. 2014)

Příklady

1. Příklady, které jsme na minulém cvičení nestihli: falešný důkaz indukcí tvrzení o přímkách v rovině, důkaz odhadu počtu kořenů polynomu indukcí, (ne)zachovávání injektivity a surjektivity při skládání funkcí.

2. Připomeňte si, co to je těleso $(F, +, \cdot, 0, 1)$. Ukažte, že $\{1, 2, \dots, 7\}$ se sčítáním a násobením modulo 7 je těleso. Proč to neplatí při počítání modulo 6?

3. Připomeňte si, co to je uspořádané těleso $(F, +, \cdot, 0, 1, <)$. Uveďte příklad konečného uspořádaného tělesa.

4. Připomeňme si, jaká binární relace $(M, <)$ na množině M je částečné uspořádání a jaká je lineární uspořádání. Je relace dělitelnosti $\cdot \mid \cdot$ (tj. $a \mid b \iff b = ac$ pro nějaké c) na množině celých čísel $\mathbb{Z}$ částečné uspořádání? Je to lineární uspořádání? A co když $\mathbb{Z}$ nahradíme množinou $\{1, 2, 4, 8, 16, \dots\}$ (mocniny čísla 2)?

5. Připomeňme si, jak se definuje maximum, minimum, supremum a infimum v obecné částečně uspořádané množině $(M, <)$.

6. Nalezněte $\sup(\{1, 2, 3, 4, 5, 6\})$ v $(\mathbb{N}, |)$ (č. uspořádání dělitelností). Podobně nalezněte $\inf(\{10, 62, 155\})$.

7. Nechť $X = \{\alpha \in \mathbb{Q} \mid \alpha^2 < 100/49\}$. Ve $(\mathbb{Q}, <)$ (obvyklé uspořádání zlomků) nalezněte $\inf(X)$ a $\sup(X)$. Jak se výsledky změní, když obě $\mathbb{Q}$ nahradíme $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ nebo $\mathbb{R}$?

Domácí úkoly (po 3 bodech) — lhůta pro odevzdání je 21. 10. do 15:00

1. Nechť M je množina všech podmnožin množiny přirozených čísel $\mathbb{N}$ a $(M, \subset)$ je její částečné uspořádání inkluzí (tj. relací být podmnožinou). Má každá podmnožina $X \subset M$ v tomto uspořádání supremum? V případech, že supremum existuje, popište, jak vypadá. Odpovědi zdůvodněte.

2. Totéž pro infimum.

3. Dokažte, že v $(\mathbb{R}, <)$ (obvyklé uspořádání reálných čísel) pro každou množinu $X \subset \mathbb{R}$ platí vzorec $\sup(X) = -\inf(-X)$ (kde $-X = \{-a \mid a \in X\}$).