

1. Cvičení z MA I. (1.10. 2014)

Markéta Lopatková

ufal.mff.cuni.cz/course/nmai054

Co je relace, zobrazení, funkce? Vlastnosti relace. Inverzní funkce.
Absolutní hodnota udává 'vzdálenost' (vlastnosti vzdálenosti).
Goniometrické funkce. Logaritmus a exponenciála.
Algebraické vzorce!!

1. Řešte rovnice a nerovnice v R :

- (a) $\frac{x-2}{2x-8} \geq 1$ (b) $\frac{x+3}{x-1} \geq \frac{x+1}{x-5}$ (c) $|5x-2| < x$
(d) $\frac{|x+1|}{x-1} \geq x$ (e) $||x-2|+1| \leq 5$ (f) $|x^2-4x+3| \leq |x^2-4|$
(g) $\log_{\frac{1}{4}} x = \frac{3}{2}$ (h) $\log_a \sqrt{1000} = \frac{3}{2}$
(i) $\log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 3x + 3) \geq 0$ (j) $\cos^2 x > \sin^2 x$

2. Určete reálná čísla a a b tak, aby graf funkce f procházel body A a B :

- (a) $f(x) = a \cdot 2^x + b$ $A = [0; \frac{7}{2}]$, $B = [-1; 2]$
(b) $f(x) = 2^{a+x} + b$ $A = [1; 15]$, $B = [-2; 1]$

3. Nakreslete grafy funkcí:

- (a) $|||x| - 1| - 1| - 1|$, $||x - 1|^2 - 1|$, $||x - 1| - 1|^2$
(b) $\cos x$, $\cos(x + \pi)$, $\cos(2x + \pi)$, $\sin |x|$, $|\sin x|$
(c) $\sin x^2$, $\sin \frac{1}{x}$, $\ln \sin x$, $\ln \ln \sin x$

4. Ukažte, že pro všechna $a, b \in R$ platí:

- (a) $|a + b| \leq |a| + |b|$
(b) $||a| - |b|| \leq |a - b|$
(c) $|a - b| \leq |a - c| + |c - b|$

5. AG nerovnost: Pro kladná reálná x_1, \dots, x_n platí:

$$\sqrt[n]{x_1 \dots x_n} \leq \frac{1}{n}(x_1 + \dots + x_n)$$

Dokažte pro $n = 2$.

6. Ukažte, že každý celočíselný obnos větší nebo roven 8 lze vyplatit pětikorunami a tříkorunami.

7. Rozhodněte o pravdivosti a negujte:

- (a) $\forall x \in N \quad \exists y \in N \quad \forall z \in N$ platí: $z > x \Rightarrow y < z$
- (b) $\exists y \in N \quad \forall x \in N \quad \forall z \in N$ platí: $z > x \Rightarrow y < z$
- (c) $\exists y \in N \quad \forall x \in N \quad \forall z \in R$ platí: $z > x \Rightarrow y < z$

8. Dokažte, že následující výroky jsou ekvivalentní:

- (a) $A \Rightarrow B, \neg B \Rightarrow \neg A, \neg(A \& \neg B), \neg A \vee B$
- (b) $(A \Rightarrow B) \Rightarrow C, A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$

9. Který z následujících výroků je silnější?

- (a) $\forall x \in R \quad \exists K > 0, K \in R$ takové, že $|f(x+1) - f(x)| \leq K$
- (b) $\exists K > 0, K \in R \quad \forall x \in R$ takové, že $|f(x+1) - f(x)| \leq K$

Domácí úkol:

Definujte funkci. Definujte zdola a shora omezenou funkci. Definujte maximum a minimum funkce. Pro následující funkce f, g a h rozhodněte, zda

a) jsou omezené na svém definičním oboru (příp. omezené shora či zdola; případně navrhněte interval, ve kterém omezené jsou);

b) nabývají maxima a minima (pokud znáte, rozhodněte o supremu/infimu);

c) načrtněte grafy funkcí.

Svá tvrzení dokažte!!

1. $f(x) = \frac{10}{x^2+2}$

2. $g(x) = -|\log x|$ (kde $\log x$ je přirozený logaritmus)

3. $h(x) = f(x) + g(x)$

Řešení:

1a. $(4; 6)$ 1b. $\langle -\infty; -7 \rangle \cup (1, 5)$ 1c. $(1/3; 1/2)$ 1d. $\langle -\infty; 1 - \sqrt{2} \rangle \cup (1; 1 + \sqrt{2})$ 1e. $\langle -2; 6 \rangle$ 1f. $\langle 1 - \frac{\sqrt{6}}{2}; \frac{7}{4} \rangle \cup \langle 1 + \frac{\sqrt{6}}{2}; +\infty \rangle$ 1g. $\frac{1}{8}$ 1h. $a = 10$ 1i. $\langle 1; 2 \rangle$ 1j. $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \langle -\frac{\pi}{4} + k\pi; \frac{\pi}{4} + k\pi \rangle$

2a. $a = 3, b = \frac{1}{2}$ 2b. $a = 3, b = -1$