13. cvičení 4. 1. 2016 — zápočtový test

Všechny příklady jsou po 3 bodech. Odpovědi vždy zdůvodněte.

1. Je množina $X = \{(1 - \frac{1}{n}, (-1)^n) \mid n = 1, 2, 3, \dots\}$ v euklidovském prostoru $\mathbb{R}^2$ uzavřená?.
2. Rozhodněte, zda je množina $X = \{(1, \frac{1}{n}, n) \mid n = 1, 2, 3, \dots\} \subset \mathbb{R}^3$ s indukovanou euklidovskou metrikou úplný metrický prostor.
3. Konverguje posloupnost funkcí $f_n(x) = \frac{x+n}{n}$, $n = 1, 2, \dots$, na množině $X = (-\infty, 0]$ stejnoměrně?
4. A na množině $X = \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$?
5. Konverguje řada funkcí $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ na intervalu $(1, +\infty)$ lokálně stejnoměrně?
6. A na intervalu $[0, 1]$?
7. Na jaké množině $X \subset \mathbb{R}$ konverguje bodově řada funkcí $\sum_{n \geq 1} \frac{(-x)^n}{n}$?
8. Konverguje na této množině stejnoměrně?
9. Nalezněte poloměr konvergence mocninné řady $\sum_{n \geq 0} (3^n - n2^n) x^n$.
10. Vypočítejte Fourierovy koeficienty funkce $f : [-\pi, \pi) \to \mathbb{R}$, $f(x) = -x$.

Řešení.

1. $\overline{X} = X \cup \{(1, 1), (1, -1)\}$.
2. Ano je, protože X je uzavřená podmnožina $\mathbb{R}^3$ (její doplněk je otevřená množina, protože v každé kouli s poloměrem menším než $\frac{1}{2}$ leží nejvýše jeden bod X). Každá cauchyovská posloupnost v X má limitu v $\mathbb{R}^3$, která vzhledem k uzavřenosti X leží i v X.
3. Ne. Bodová limita je konstantní 1 a $\sup_{x \in (-\infty, 0]} \left| \frac{x+n}{n} - 1 \right| = +\infty$ pro každé pevné n. Nebo: $|f_n(-n) - 1| = |0 - 1| = 1$ pro každé n.
4. Ne, ze stejného důvodu. Nebo: $|f_n(n) - 1| = |2 - 1| = 1$ pro každé n.

5. Ano, podle Weierstrassova kritéria dokonce konverguje stejnoměrně na každé množině $(c,+\infty)$ pro $c > 1$: $\sup_{x\in(c,+\infty)} |1/n^x| = 1/n^c$ a $\sum_{n\geq 1} 1/n^c < +\infty$.

6. Ne, tam nekonverguje ani bodově, protože $\sum_{n\geq 1} 1/n^x = +\infty$ pro $x \in [0,1]$.

7. Na $(-1,1]$. Je to vlastně mocninná řada s koeficienty $a_n = (-1)^n/n$, má poloměr konvergence $R = 1$ (je $\lim_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = 1/\lim_{n\to\infty} n^{1/n} = 1$), a určitě konverguje na intervalu $(-1,1)$ a diverguje pro $|x| > 1$. Pro $x = -1$ dostáváme divergentní harmonickou řadu a pro $x = 1$ střídavou harmonickou řadu konvergující podle Leibnizova kritéria.

8. Ne, pro $x \to -1^+$ se konvergence kazí, protože dostáváme harmonickou řadu. Stejnoměrná konvergence by znamenala, že pro každé $\varepsilon > 0$ existuje m, že $\sup_{x\in(-1,1]} \left|\frac{(-x)^m}{m} + \frac{(-x)^{m+1}}{m+1} + \cdots\right| < \varepsilon$. Platí ale opak, pro každé pevné $M \geq m$ máme

$$\sup_{x\in(-1,1]} \left|\sum_{n\geq m} \frac{(-x)^n}{n}\right| \geq \sup_{x\in(-1,0)} \sum_{n\geq m} \frac{(-x)^n}{n} \geq \sup_{x\in(-1,0)} \sum_{n=m}^{M} \frac{(-x)^n}{n} = \sum_{n=m}^{M} \frac{1}{n},$$

a protože $\sum_{n\geq m} \frac{1}{n} = +\infty$, pro $M \to \infty$ jde poslední součet do $+\infty$. Tedy $\sup_{x\in(-1,1]} \left|\frac{(-x)^m}{m} + \frac{(-x)^{m+1}}{m+1} + \cdots\right| = +\infty$ pro každé m.

9. Poloměr konvergence je $1/3$, protože $\lim_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = \lim_{n\to\infty}(3^n - n2^n)^{1/n} = 3\lim_{n\to\infty}(1 - n(2/3)^n)^{1/n} = 3$.

10. $a_n = 0$ a $b_n = (-1)^n 2/n$ pro každé n. Cosinové koeficienty a_n jsou 0, protože f je lichá funkce. Sinové jsou $b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\ dx$. Protože $\int(-x)\sin(nx) = (x/n)\cos(nx) - (1/n^2)\sin(nx)$, $\sin(n\pi) = 0$ a $\cos(n\pi) = (-1)^n$ pro $n \in \mathbb{Z}$, máme vzorec pro b_n.