

Cvičení 12, 21. 12. 2015

Příklady

1. Rozviňte $f(x) = |x|$ na $-\pi \leq x \leq \pi$ do Fourierovy řady a zjistěte, k jakým hodnotám tato řada konverguje.
2. Totéž pro $f(x) = \cos(x)^3$ na \mathbb{R} .
3. Totéž pro $f(x) = \sin(x)^3$ na \mathbb{R} .
4.
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(nx)}{\sin x} dx = ?$$
5. Pro $n = 0, 1, 2, 3, \dots$, $(1/(1+x^2))^{(n)} = ?$
6. Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots = f(x)$. Pak $a_0 + a_2 x^2 + a_4 x^4 + \dots = ?$ a $a_1 + a_3 x^3 + a_5 x^5 + \dots = ?$.
7. A $a_1 + a_5 x^5 + a_9 x^9 + a_{13} x^{13} + \dots = ?$.

Domácí úkoly — lhůta pro odevzdání je tento pátek do 18:00

1. (5 bodů) Odhadněte shora počet řešení $x \in \mathbb{R}$ rovnice $a \exp(x) + b \exp(2x) + c \exp(3x) + d \exp(4x) = 0$, kde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ jsou dané koeficienty. Návod: Rolleova věta.
2. (4 body) Odvoďte vzorec pro $\sin(x) + \sin(2x) + \dots + \sin(nx)$, pomocí $\exp(ix) = \cos x + i \sin x$.
3. (6 bodů) Nechť $(a_1, a_2, \dots) \subset \mathbb{R}$ je lineárně rekurentní posloupnost řádu ≤ 2 , tj. $a_{n+2} = a a_{n+1} + b a_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ a nějaké koeficienty $a, b \in \mathbb{R}$ (např. Fibonacciova čísla). Dokažte, že když rovnice $a_n = 0$ má jen konečně mnoho řešení $n \in \mathbb{N}$, pak má nejvýše jedno řešení.