

Cvičení 10, 5. 12. 2013

Příklady

1. Víme, že $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \frac{\pi}{4}$. Čemu se rovná

$$\frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{5 \cdot 6} - \frac{1}{7 \cdot 8} + \dots ?$$

2. Rozviňte funkci $\sin(2x)$ do Fourierovy řady.

3. Vypočtěte

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(3x)^2 dx .$$

4. Nechť $f(x) = |x|$ pro $-\pi \leq x \leq \pi$ a na zbytek \mathbb{R} je funkce f rozšířena, aby byla 2π -periodická. Nalezněte její Fourierovu řadu a zjistěte, k jakým hodnotám tato řada konverguje.

Domácí úkoly — lhůta pro odevzdání je 11. 12. do 12:00

1. (4 body) Nechť $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ má Riemannův integrál na každém intervalu $[a, b]$ a je p -periodická ($p > 0$), tj. pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí, že $f(x) = f(x + p)$. Dokažte, že integrál $\int_a^{a+p} f$ má jedinou hodnotu, nezávislou na a .
2. (4 body) Nechť $f(x) = 0$ pro $-\pi \leq x < 0$, $f(x) = 1$ pro $0 \leq x < \pi$ a na zbytek \mathbb{R} je funkce f rozšířena, aby byla 2π -periodická. Nalezněte její Fourierovu řadu a zjistěte, k jakým hodnotám tato řada konverguje. Konverguje stejnoměrně?
3. (4 body)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5^n} = ? \quad \text{a} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n5^n} = ?$$