MATEMATICKÉ STRUKTURY (NMAI064)
letní semestr 2022/23
přednášející: Martin Klazar

PŘEDNÁŠKA 10 (19. 4. 2023). TOPOLOGIE 1: ZPŮSOBY ZAVEDENÍ, SPOJITÁ ZOBRAZENÍ

(na základě poznámek k přednášce A. Pultra, kapitola V.1–V.3)

• *Opakování metrických prostorů.* K pojmu prostor lze přistupovat několika způsoby. Studenti se obvykle nejprve setkají s *metrickými prostory.* Množina bodů X plus nezáporná reálná funkce ρ na kartézském součinu $X \times X$ (metrika nebo funkce vzdálenosti) kde,

$\rho(x, y) = 0$, právě když $x = y$.

$\rho(x, y) = \rho(y, x)$ (symetrie).

$\rho(x, z) \le \rho(x, y) + \rho(y, z)$ (trojúhelníková nerovnost).

Funkce $f\colon X \to Y$, či $f\colon (X, \rho) \to (Y, \sigma)$, mezi metrickými prostory je *spojitá*, pokud

$$\forall\, x \in X\ \forall \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ \big(\rho(x,\, y) < \delta \Rightarrow \sigma(f(x),\, f(y)) < \varepsilon\big)\ .$$

Úloha 1 *Ukažte, že ze tří axiomů lze odvodit nezápornost ρ.*

Úloha 2 *Nechť $X := \mathcal{R}(a, b)$ (Riemannovy integrovatelné funkce $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$) a*

$$\rho(f,\, g) := \int_a^b |f(t) - g(t)|\ \mathrm{dt}\ .$$

Rozhodněte, zda (X, ρ) je metrický prostor.

Na druhou stranu se studenti velmi brzy dozví, že pro mnoho účelů (například pro základní problémy matematické analýzy) konkrétně zvolená metrika není až tak důležitá — například v euklidovské rovině místo geometricky intuitivní vzdálenosti

$$\rho((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$

vezmeme pohodlnější vzdálenost

$$\max(|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|)$$

a všechno, co se týká spojitosti zůstává v platnosti.

• *Zrození okolí.* V roce 1914 *Felix Hausdorff* představil strukturu spojitosti založenou na pojmu okolí. Ujal se (v několika variantách — později dáme přednost přístupu využívajícímu tzv. otevřené množiny). Intuice je velmi uspokojivá: modeluje koncept obklopení a nikoli ležet "jen na hranici". Například bod a v euklidovské rovině, pro který $\rho(a, (0,0)) < 1$ je obklopen množinou $M = \{x \mid \rho(x, (0,0)) \leq 1\}$, zatímco takový bod b, že $\rho(b, (0,0)) = 1$ jí obklopen není, ačkoli do ní také patří. Spojitost je pak definována tím, že se požaduje

> pro každé $x \in X$ a pro každé okolí V hodnoty $f(x)$ existuje okolí U bodu x, že $f[U] \subseteq V$.

Příklady. 1. Na reálné ose vezměte M za okolí z x, pokud existují taková čísla a, b, že $a < x < b$ a $\{y \mid a < y < b\} \subseteq M$. Všimněte si, že spojitá zobrazení v tomto smyslu se shodují s těmi spojitými ve standardní metrické ε, δ-definici.

2. Pojem okolí situaci zjednodušuje. Například vezměme rozšířenou reálnou osu $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, definujeme okolí $x \in \mathbb{R}$ jako dříve a za

$+\infty$ (resp. ∞) vezmeme M, pro které existuje číslo K s $\{x \mid x > K\} \subseteq M$ (resp. $\{x \mid x < K\} \subseteq M$). Pak požadavek

> pro každé okolí U bodu b existuje takové okolí V bodu a, že $f[V \setminus \{a\}] \subseteq U$

definuje limitu funkce f v a jako b pro libovolné a a b, ať jsou tyto prvky konečné nebo nekonečné.

• *Okolí. Topologie na množině X je definována okolími*, pokud je každému prvku $x \in X$ přiřazena *neprázdná* množina $\mathcal{U}(x) \subseteq \mathcal{P}(X)$ tak, že

(nb1) Pro každé $U \in \mathcal{U}(x)$ je $x \in U$.

(nb2) Pokud $U, V \in \mathcal{U}(x)$, pak $U \cap V \in \mathcal{U}(x)$.

(nb3) Pokud $U \in \mathcal{U}(x)$ a $U \subseteq V \subseteq X$, pak $V \in \mathcal{U}(x)$.

(nb4) Pro každé $U \in \mathcal{U}(x)$ existuje $W \in \mathcal{U}(x)$ s $W \subseteq U$ a takové, že pro každé $y \in W$ je $U \in \mathcal{U}(y)$.

Úloha 3 *Pokud platí podmínky* (nb1)–(nb4)*, pak máme také formálně silnější*

(nb5) *Pro každé $U \in \mathcal{U}(x)$ existuje $W \in \mathcal{U}(x)$ s $W \subseteq U$ a takové, že pro každé $y \in W$ je $W \in \mathcal{U}(y)$.*

• *Otevřené množiny.* Nyní představíme jiný přístup (brzy uvidíme, že je ekvivalentní s předchozím). Řekneme, že máme *topologii na množině X definovánu otevřenými množinami*, pokud je dána taková množina $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$, že

(op1) $\emptyset, X \in \tau$.

(op2) Pokud $U, V \in \tau$, pak $U \cap V \in \tau$.

(op3) Pokud $U_i \in \tau$ pro každé $i \in I$, pak $\bigcup_{i \in I} U_i \in \tau$.

Prvky $U \in \tau$ jsou *otevřené množiny*. Koncept otevřené množiny není tak intuitivní jako koncept okolí, ale je mnohem jednodušší s ním pracovat. Všimněte si také, že už nemáme žádný požadavek podobný nepříliš průhlednému (nb4).

Dva prezentované přístupy (a další budou uvedené později) jsou ekvivalentní v tom smyslu, že jsou na sebe vzájemně převeditelné. Proberme to podrobněji.

Pokud máme topologii $\mathcal{U}$ na X ve smyslu okolí, definujeme $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$ jako

$$U \in \tau, \text{ pokud } U \in \mathcal{U}(x) \text{ pro každé } x \in U \tag{*}$$

(to znamená, že U je otevřená, pokud je okolím každého svého bodu). Čtenář snadno ověří, že takový systém τ splňuje požadavky (op1) až (op3).

Pokud máme topologii $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$ ve smyslu otevřených množin, definujeme okolí $\mathcal{U}$ jako

$$U \in \mathcal{U}(x), \text{ pokud existuje } V \in \tau \text{ takové, že } x \in V \subseteq U\ . \tag{**}$$

Opět je snadné vidět, že takový systám $\mathcal{U}$ splňuje požadavky (nb1) až (nb4).

Začneme s $\mathcal{U}$ a vytvoříme τ pomocí (*). Vezmeme tuto τ a definujeme $\mathcal{U}'$ pomocí (**). Ukazuje se, že $\mathcal{U}' = \mathcal{U}$.

Začneme s danou τ a definujeme $\mathcal{U}$ pomocí (**). Poté z $\mathcal{U}$ definujeme τ' podle (*). Ukazuje se, že $\tau = \tau'$

Úloha 4 *Dokažte obě „Ukazuje se, že ... “.*

• *Uzavřené množiny.* Topologie na X je dána pomocí otevřených množin. O podmnožině $A \subseteq X$ řekneme, že je *uzavřená*, pokud je $X \setminus A$ otevřená. Z De Morganových pravidel máme

> sjednocení konečně mnoha a průnik libovolně mnoha uzavřených množin je uzavřena množina.

Můžeme samozřejmě začít se systémem, který má tuto vlastnost a definovat otevřené množiny jako doplňky uzavřených.

• *Uzávěr.* Nechť (X, τ) je a topologie. Pro $M \subseteq X$ definujeme uzávěr množiny M jako

$$\overline{M} := \bigcap \{A \mid M \subseteq A \subseteq X \text{ a } A \text{ je uzavřená}\} .$$

Protože průnik libovolného systému uzavřených množin je uzavřená množina, vidíme, že $\overline{M}$ je ve smyslu inkluze nejmenší uzavřená množina obsahující M.

Úloha 5 *Dokažte následující vlastnosti operace uzávěru.*

1. $M \subseteq \overline{M}$ *a* $\overline{\emptyset} = \emptyset$.
2. $M \subseteq N \Rightarrow \overline{M} \subseteq \overline{N}$.
3. $\overline{M \cup N} = \overline{M} \cup \overline{N}$.
4. $\overline{\overline{M}} = \overline{M}$.

Pokud chceme definovat uzávěr z okolí, položíme

$$\overline{M} = \{x \in X \mid \forall \text{ okolí } U \text{ bodu } x \text{ platí, že } U \cap M \neq \emptyset\} .$$

Úloha 6 *Dokažte to.*

Topologie může být definována i tak, že se začne uzávěrem. Za základní pojem pak považujeme uzávěr jako zobrazení u z $\mathcal{P}(X)$ do $\mathcal{P}(X)$, $M \mapsto \overline{M}$, splňující požadavky z úlohy 5. Pak definujeme otevřené množiny U jako ty, pro které $u(X \setminus U) = X \setminus U$ a $M \subseteq X$ je okolí x, pokud $x \notin u(X \setminus M)$. Lze ověřit ekvivalenci, podobně jako v (*) a (**) výše.

A ještě jedna definice: *vnitřek množiny* $M \subseteq X$ je největší otevřená množina obsažená v M. Vnitřky mají vlastnosti (duálně) analogické vlastnostem uzávěru (jak přesně?), a mohou být též vzaty pro topologii jako základní.

Úloha 7 *Popište podrobně duální vlastnosti vnitřků.*

Shrnutí a definice. Topologický prostor je dán topologií definovanou kterýmkoli ze způsobů popsaných výše. Nezáleží na tom, kterým z pojmů začneme (okolí, otevřené nebo uzavřené množiny, uzávěr, vnitřek), stejně pracujeme se všemi. V těchto přednáškách kvůli jednoduchosti obvykle začneme otevřenými množinami.

• *Příklady.* Nejprve uvažujeme *metrické prostory.* V metrickém prostoru (X, ρ) definujeme pro $x \in X$ a $\varepsilon > 0$ množinu

$$\Omega(x,\, \varepsilon) := \{y \in X \mid \rho(x,\, y) < \varepsilon\}$$

(otevřená koule se středem x a poloměrem ε). Okolí bodu $x \in X$ je libovolná $M \subseteq X$, že pro dostatečně malé ε je $\Omega(x, \varepsilon) \subseteq M$. Otevřená množina je ta, která je v tomto smyslu okolím každého svého bodu. Tedy ta U, že pro každé $x \in U$ existuje ε, že $\Omega(x, \varepsilon) \subseteq M$. Pro bod $x \in X$ a podmnožinu $A \subseteq X$ definujeme $\rho(x, A) := \inf(\{\rho(x, a) \mid a \in A\})$. Položíme

$$\overline{A} := \{x \in X \mid \rho(x,\, A) = 0\}$$

a prohlásíme A za uzavřenou, pokud $\overline{A} = A$. Ověřte, že vztahy mezi takto definovanými pojmy souhlasí s výše uvedenými definicemi. O topologickém prostoru získaném tímto způsobem z metrického se řeknw, že je *metrizovatelný*.

Diskrétní prostor. Na množině X vezmeme za τ celou $\mathcal{P}(X)$. Tím pádem všechny $M \subseteq X$ jsou otevřené i uzavřené, každá množina obsahující bod x je jeho okolí a $\overline{M} = M$ pro libovolnou $M \subseteq X$. V tomto případu mluvíme o *diskrétní topologii* na X.

Antidiskrétní prostor je opačný extrém: jako otevřené (a uzavřené) množiny vezmeme jen $\emptyset$ a X. Pak každý bod má jediné okolí, konkrétně celou X, a uzávěrem jakékoli neprázdné množiny je také celý prostor.

Kofinitní topologie je jen o něco méně primitivní případ: otevřené množiny jsou $\emptyset$ a doplňky konečných množin. Uzavřené množiny jsou pak přesně ty konečné a celý prostor a uzávěrem nekonečné množiny je celý prostor.

Úloha 8 *Ověřte, že kofinitní topologie je skutečně topologie.*

Alexandrovova (kvazidiskrétní) topologie. Nechť $(X, \leq)$ je předuspořádání (následující definice se obvykle používá pro posety, ale předuspořádání stačí). Vzpomeňme si na předchozí zápis $\uparrow M$ a $\downarrow M$. V Alexandrovově topologii jsou otevřené množiny všechny rostoucí množiny (tj. ty $U \subseteq X$, že $\uparrow U = U$). Uzavřené množiny jsou pak všechny klesající (tj. ty $U \subseteq X$, že $\downarrow U = U$ a uzávěr je dán jako $\overline{M} = \downarrow M$. Všimněte si, že v této topologii

(qd) *všechny* průniky otevřených množin jsou otevřené, *všechna* sjednocení uzavřených množin jsou uzavřená a $\overline{\bigcup_{i \in J} M_i} = \bigcup_{i \in J} \overline{M_i}$

pro jakýkoli systém podmnožin.

To je důvod, proč se Alexandrovovy prostory často nazývají *kvazi-diskrétní* prostory. Jako jednoduché cvičení dokažte, že pro každý prostor splňující podmínku (qd) existuje takové předuspořádání, že topologie je dána, jak popsáno (definujte $x \leq y$ pomocí $\overline{\{y\}} \subseteq \overline{\{x\}}$).

Scottova topologie. Opět začneme s posetem $(X, \leq)$. Podmnožinu $U \subseteq X$ prohlásíme jako otevřenou

(Sc) pokud je rostoucí a pokud pro každou usměrněnou množinu D platí, že $\sup D \in U \Rightarrow U \cap D \neq \emptyset$.

Tato topologie hraje důležitou roli v teoretické informatice.

• *Báze a subbáze topologie. Báze* topologie τ (dané otevřenými množinami) je podmnožina $\mathcal{B} \subseteq \tau$ splňující, že

$$\forall U \in \tau \left(U = \bigcup\{B \in \mathcal{B} \mid B \subseteq U\}\right) .$$

Všimněte si, že báze může být mnohem jednodušší a transparentnější než celá topologie: například můžeme vzít otevřené intervaly jako bázi topologie reálné osy (a vystačíme si i s otevřenými intervaly (a, b) s racionálními konci a a b). Podobně lze za bázi topologie roviny vzít otevřené čtverce.

Subbáze topologie τ je $\mathcal{S} \subseteq \tau$ splňující, že množina všech konečných průniků prvků $\mathcal{S}$ je báze topologie τ. Subbáze mohou být opět mnohem jednodušší než báze. Například pro topologii reálné osy si vystačíme se subbází $\{(-\infty, a), (a, +\infty) \mid a \in \mathbb{Q}\}$.

Úloha 9 *Podmnožina $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ je subbází topologie, totiž nejmenší topologie, ve které jsou všechny $U \in \mathcal{S}$ otevřené. Řekneme, že tato topologie je* generovaná množinou $\mathcal{S}$.

Tvrzení 10 (o bázích) *Množinový systém $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ je bází topologie (X, τ), právě když platí následující dvě podmínky.*

1. $X = \bigcup \mathcal{B}$.

2. *Pokud $A, B \in \mathcal{B}$, pak $A \cap B = \bigcup \{C \in \mathcal{B} \mid C \subseteq A \cap B\}$.*

Úloha 11 *Dokažte toto tvrzení.*

• *Další dva příklady.* *Intervalová topologie.* Nechť $(X, \leq)$ je lineárně uspořádaná množina, přičemž *v X není ani minimální ani maximální prvek*. Množina všech intervalů $(a, b) := \{x \in X \mid a < x < b\}$, $a, b \in X$, tvoří bázi topologie. Ta se nazývá *intervalovou topologií* na $(X, \leq)$.

Úloha 12 *Ověřte, že intervaly (a, b) tvoří bázi topologie.*

Sorgenfreyova přímka. A ještě jedna, trochu bizarní topologie na množina reálných čísel (lze ji použít pro tzv. polospojitost, ale také teoreticky pro ilustraci různých podivností). *Sorgenfreyova topologie* je generován polouzavřenými intervaly. Přesněji řečeno má bázi

$$\mathcal{B} := \{[a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\} ,$$

kde $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$.

Úloha 13 *Dokažte, že $\mathcal{B}$ je bází topologie na $\mathbb{R}$.*

Tvrzení 14 (o Sorgenfreyově přímce) *Na rozdíl od obvyklé euklidovské topologie na $\mathbb{R}$ nemá Sorgenfreyova topologie žádnou konečnou nebo spočetnou bázi.*

Důkaz. Nechť $U_i \subseteq \mathbb{R}$, $i \in I$ je systém otevřených množin v Sorgenfreyově topologii tvořící její bázi. Každá U_i je tedy sjednocením několika intervalů tvaru $[a, b)$ a každý interval $[a, b)$, $a < b$, je sjednocením

$$[a,\, b) = \bigcup_{i\in J} U_i$$

pro nějakou $J \subseteq I$. Klíčový postřeh je, že pak existuje reálné číslo c s $c > a$ (a vlastně $c \leq b$) a takový index $j \in J$, že $[a, c) \subseteq U_j$. Proto můžeme definovat zobrazení $f\colon \mathbb{R} \to I$ pomocí $f(a) := j$, kde $j \in J$ je onen index pro interval $[a, b) = [a, a+1)$. Nemůže platit, že

$$f(a) = f(a') = j \in I$$

pro nějaká reálná čísla $a < a'$. To by totiž znamenalo, že pro nějaká reálná čísla $c > a$ a $c' > a'$ je

$$[a,\, c) \subseteq U_j \subseteq [a,\, a+1) \wedge [a',\, c') \subseteq U_j \subseteq [a',\, a'+1)$$

a $a \in [a', a'+1)$, což neplatí. Funkce f je tedy injektivní a I je nespočetná. $\square$

• *Spojitá zobrazení.* Zobrazení $f\colon X \to Y$ je *spojité zobrazení* z topologie (X, τ) do jiné topologie (Y, σ), psáno i jako $f\colon (X, \tau) \to (Y, \sigma)$, pokud pro každé $x \in X$ a každé okolí V hodnoty $f(x)$ v topologii σ existuje takové okolí U bodu x v topologii τ, že $f[U] \subseteq V$.

Úloha 15 *Dokažte, že f je spojité, právě když*

$$\forall V \in \sigma \left(f^{-1}[V] \in \tau\right) .$$

Dokažte tuto ekvivalenci i pro uzavřené množiny.

Úloha 16 *Dokažte, že složením dvou spojitých zobrazení mezi topologickými prostory vznikne spojité zobrazení.*

Je-li X vybavena diskrétní topologií nebo Y je vybavena antidiskrétní topologií, pak každé zobrazení $f\colon X \to Y$ je spojité.

Důsledek 17 *Nechť $\mathcal{S}$ je subbáze topologie σ. Pak $f\colon (X,\tau) \to (Y,\sigma)$ je spojité, právě když pro každou $U \in \mathcal{S}$ je $f^{-1}[U] \in \tau$.*

Tvrzení 18 (jedno spojité zobr.) *Nechť $D \subset I = [0,1]$ (I je vybaven topologií indukovanou standardní metrikou) splňuje, že pro $\forall\ a < b$ v I $\exists\ d \in D$, takže $a < d < b$. Nechť U_d, $d \in D$, jsou takové otevřené množiny v topologickém prostoru X, že*

$$d < e \Rightarrow \overline{U_d} \subseteq U_e\ .$$

Pak zobrazení $f\colon X \to I$ definované jako

$$f(x) := \inf(\{d \in D \mid x \in U_d\})$$

je spojité.

Důkaz. Pro $a \in (0,1)$ platí, že

$$f(x) > a \iff x \notin \bigcap\{\overline{U_d} \mid a < d\} \iff x \in X \setminus \bigcap\{\overline{U_d} \mid a < d\}\ .$$

Též

$$f(x) < a \iff x \in \bigcup\{U_d \mid a > d\}\ .$$

Množiny $f^{-1}[\,(a,1]\,]$ a $f^{-1}[\,[0,a)\,]$ jsou tedy v X otevřené. Protože

$$\{(a,1],\ [0,a) \mid a \in I\}$$

je dílčí subbáze prostoru I, dostáváme tvrzení. □

Toto tvrzení využijeme později.

• *Homeomorfismy.* Pokud pro spojité zobrazení $f\colon (X,\tau) \to (Y,\sigma)$ mezi top. prostory existuje inverzní spojité zobrazení $g\colon (Y,\sigma) \to (X,\tau)$, řekneme, že f je *homeomorfismus* a že prostory (X,τ) a (Y,σ) jsou *homeomorfní.*

Úloha 19 *Nechť* $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ *je jednotková kružnice v rovině a zobrazení* $f\colon [0, 2\pi) \to S$ *je dáno jako*

$$f(t) = (\cos t, \sin t)\ .$$

Je f *homeomorfismus mezi euklidovskými topologickými prostory* $[0, 2\pi)$ *a* S*?*

DĚKUJI ZA POZORNOST!

Úlohy za dom. cv. jsou: 2, 5, 11 a 19.