MATEMATICKÁ ANALÝZA 3 (NMAI056)
letní semestr 2021/21
přednášející: Martin Klazar

PŘEDNÁŠKA 6 (25. 3. 2022). DŮKAZ DIRICHLETOVY VĚTY. EULEROVO ŘEŠENÍ BASILEJSKÉHO PROBLÉMU A DALŠÍ POZNÁMKY. p-ADICKÁ ČÍSLA (new!)

• *Důkaz Dirichletovy věty.* Budeme pro něj potřebovat jedno pomocné tvrzení.

Tvrzení 1 (o Dirichletově jádře) *Nechť $n \in \mathbb{N}$ a*

$$J_n(x) := \frac{1}{2} + \cos x + \cos(2x) + \cdots + \cos(nx)\ .$$

Pak pro každé $x \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ máme

$$J_n(x) = \frac{\sin((n+1/2)x)}{2\sin(x/2)}\ .$$

Dále také

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} J_n(x)\ \mathrm{dx} = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} J_n(x)\ \mathrm{dx} = \frac{1}{2}\ .$$

Důkaz. Pro $q := e^{ix}$ ($i = \sqrt{-1}$ a $x \in \mathbb{R}$) máme

$$J_n(x) = \frac{1}{2}\sum_{j=-n}^{n} q^j\ ,$$

protože pro $k \in \mathbb{N}$ se $q^{-k} + q^k$ rovná

$$\cos(kx) + i\sin(kx) + \cos(-kx) + i\sin(-kx) = 2\cos(kx)\ .$$

Takže

$$
\begin{aligned}
J_n(x) &= \frac{q^{-n}}{2}\sum_{j=0}^{2n} q^j = \frac{q^{-n}}{2}\cdot\frac{q^{2n+1}-1}{q-1} \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{q^{n+1}-q^{-n}}{q-1} = \frac{1}{2}\cdot\frac{q^{n+1/2}-q^{-n-1/2}}{q^{1/2}-q^{-1/2}} \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{2i\sin((n+1/2)x)}{2i\sin(x/2)} = \frac{\sin((n+1/2)x)}{2\sin(x/2)} \;.
\end{aligned}
$$

Co se týče integrálů, díky ortogonalitě kosinů a sinů je

$$
\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} J_n &= \langle J_n,\,1\rangle = \langle \tfrac{1}{2},\,1\rangle + \textstyle\sum_{j=1}^{n}\langle\cos(jx),\,\cos(0x)\rangle \\
&= \pi + 0 + 0 + \cdots + 0 = \pi \;.
\end{aligned}
$$

Tedy

$$
\int_{-\pi}^{0} J_n + \int_{0}^{\pi} J_n = \int_{-\pi}^{\pi} J_n = \pi \;.
$$

Protože J_n je součtem sudých funkcí, je to sudá funkce, a první dva integrály se rovnají. Tedy jsou rovny $\pi/2$ a jsme hotovi. □

S pomocí tohoto tvrzení se pustíme do důkazu Dirichletovy věty, kterou zopakujeme.

Věta 2 (Dirichletova) *Nechť*

$$
f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}
$$

je taková 2π-periodická funkce, že její zúžení na interval $[-\pi,\pi]$ je po částech hladké. Pak její Fourierova řada $F_f(x)$ má pro každé $a\in\mathbb{R}$ součet

$$
F_f(a) = \frac{f(a+0)+f(a-0)}{2} := \frac{\lim_{x\to a^+} f(x) + \lim_{x\to a^-} f(x)}{2} \;.
$$

V každém bodu spojitosti $a \in \mathbb{R}$ funkce $f(x)$ tedy její Fourierova řada má součet rovný funkční hodnotě, $F_f(a) = f(a)$.

Důkaz. Nechť $x \in \mathbb{R}$. Funkci $G(u) = G_x(u)\colon [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ definujeme jako

$$G(u) := \begin{cases} \frac{f(x+u)-f(x-0)}{2\sin(u/2)} & \ldots \quad u \in [-\pi,\, 0)\ , \\ \\ \frac{f(x+u)-f(x+0)}{2\sin(u/2)} & \ldots \quad u \in (0, \pi] \ \text{ a} \end{cases}$$

třeba $G(0) := 0$ (na této hodnotě nezáleží). Následující limitu spočítáme podle l'Hospitalova pravidla:

$$\begin{aligned} \lim_{u \to 0^-} G(u) &= \lim_{u \to 0^-} \frac{f(x+u) - f(x-0)}{2\sin(u/2)} \\ &= \lim_{u \to 0^-} \frac{f'(x+u)}{\cos(u/2)} = f'(x-0)\ . \end{aligned}$$

Pro $u \to 0^-$ totiž máme, ať x je nebo není dělící bod a_i, že $f(x+u) - f(x-0) \to 0$ díky předpokladu o f. Také $2\sin(u/2) \to 0$, takže limitujeme neurčitý výraz $\frac{0}{0}$. Úplně stejně

$$\lim_{u \to 0^+} G(u) = f'(x+0)\ .$$

Odtud vyplývá, že funkce $G(u)$ je na intervalu $[-\pi, \pi]$ omezená. Mimo jisté prstencové okolí nuly se jmenovatel $2\sin(u/2)$ neblíží k nule a čitatel je omezená funkce, protože funkce f je omezená (úloha 3). Na onom prstencovém okolí nuly omezenost plyne z existence právě spočítaných vlastních jednostranných limit. Dále má $G(u)$ na $[-\pi, \pi]$ jen konečně mnoho bodů nespojitosti, protože může být nespojitá pouze v bodech $a_i - x$, kde a_i jsou body dělení intervalu $[-\pi, \pi]$ pro po částech hladkou funkci f, a případně v nule. Podle teorie Riemannova integrálu tedy $G \in \mathcal{R}(-\pi, \pi)$.

Nechť $s_n = s_n(x)$ je n-tý částečný součet Fourierovy řady funkce f v daném bodu x:

$$s_n = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)) \ ,$$

kde

$$a_k = \frac{\langle f(t),\, \cos(kt) \rangle}{\pi} \ \text{ a } \ b_k = \frac{\langle f(t),\, \sin(kt) \rangle}{\pi} \ .$$

Rozdíl hodnot $s_n(x)$ a $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$, který nás zajímá, vyjádříme za chvíli pomocí funkce $G(u)$ jako

$$s_n(x) - \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} = \frac{\langle G(u),\, \sin((n+1/2)u) \rangle}{\pi} \ .$$

Součtový vzorec pro sinus,

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cos\beta \pm \cos\alpha \sin\beta$$

(úloha 4), dává

$$\begin{aligned} & s_n(x) - \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} = \\ & = \frac{1}{\pi} \big(\langle G(u) \cos(u/2),\, \sin(nu) \rangle + \langle G(u) \sin(u/2),\, \cos(nu) \rangle \big) \ . \end{aligned}$$

Podle teorie Riemannova integrálu jsou obě funkce $G(u)\cos(u/2)$ a $G(u)\sin(u/2)$ na intervalu $[-\pi, \pi]$ integrovatelné (úloha 5). Podle Riemann–Lebesgueova lemmatu (úloha 13 minule, vyplývá z Besselovy nerovnosti) tedy pro $n \to \infty$ oba předchozí skalární součiny jdou k nule. Proto také

$$s_n(x) - \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} \to 0 \ \text{ pro } \ n \to \infty$$

a věta je/bude dokázána.

Zbývá odvodit vyjádření tohoto rozdílu pomocí $G(u)$. Vzhledem k linearitě skalárního součinu a definici koeficientů a_k a b_k a podle součtového vzorce pro kosinus,

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

(úloha 4), máme

$$\begin{aligned}
&s_n(x) \\
&\overset{a_k \text{ a } b_k}{=} \frac{1}{\pi}\left\langle f(t),\ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\big(\cos(kt)\cos(kx) + \sin(kt)\sin(kx)\big)\right\rangle_t \\
&\overset{\sum \text{ vzorec}}{=} \frac{1}{\pi}\left\langle f(t),\ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos(k(t-x))\right\rangle_t \\
&\overset{t=:x+u}{=} \frac{1}{\pi}\left\langle f(x+u),\ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos(ku)\right\rangle_u \\
&\overset{\text{def. } J_n}{=} \frac{1}{\pi}\langle f(x+u),\ J_n(u)\rangle_u \\
&\overset{\langle\cdot,\cdot\rangle}{=} \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} f(x+u)J_n(u)\,\mathrm{du} + \int_{0}^{\pi} f(x+u)J_n(u)\,\mathrm{du}\right) .
\end{aligned}$$

Podle předchozího tvrzení máme

$$\frac{f(x-0)}{2} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x-0)J_n(u)\,\mathrm{du}$$

a

$$\frac{f(x+0)}{2} = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x+0)J_n(u)\,\mathrm{du} .$$

Takže rozdíl

$$s_n(x) - \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$$

se rovná

$$\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}(f(x+u)-f(x-0)J_n(u)\,\mathrm{du}+\right.$$
$$\left.+\int_{0}^{\pi}(f(x+u)-f(x+0)J_n(u)\,\mathrm{du}\right).$$

Podle předchozího tvrzení je $J_n(u)=\frac{\sin((n+1/2)u)}{2\sin(u/2)}$. S využitím definice funkce $G(u)$ proto předchozí rozdíl upravíme na

$$\begin{aligned}
&s_n(x)-\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}= \\
&=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}G(u)\sin((n+\tfrac{1}{2})u)\,\mathrm{du}+\int_{0}^{\pi}G(u)\sin((n+\tfrac{1}{2})u)\,\mathrm{du}\right) \\
&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}G(u)\sin((n+1/2)u)\,\mathrm{du} \\
&=\frac{\langle G(u),\,\sin((n+1/2)u\rangle}{\pi}\,.
\end{aligned}$$

$\square$

Úloha 3 *Dokažte, že každá po částech hladká funkce*

$$f\colon[a,\,b]\to\mathbb{R}$$

je omezená.

Úloha 4 *Odvoďte výše zmíněné součtové vzorce pro sinus a kosinus.*

Úloha 5 *Dokažte:* $f,g\in\mathcal{R}(a,b)\Rightarrow fg\in\mathcal{R}(a,b)$. *(Návod: použijte Lebesgueovu větu.)*

• *Eulerovo řešení Basilejského problému.* Funkce $f(x) := \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$ má pro každé $x \in \mathbb{R}$ vyjádření nekonečnou (Taylorovou) řadou

$$f(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(\pi x)^{2n-2}}{(2n-1)!} = 1 - \frac{(\pi x)^2}{3!} + \dots\ .$$

Její nulové body jsou přesně $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$, tj. $x = \pm 1, \pm 2, \dots$, a má hodnotu $f(0) = 1$. Když ji rozložíme jako polynom do součinu lineárních faktorů, dostaneme proto vyjádření

$$(f(x) =) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(\pi x)^{2n-2}}{(2n-1)!} = \prod_{k=1}^{\infty} \underbrace{\left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right)}_{(1-x/k)(1+x/k)} \quad .$$

Koeficient u x^2 je vlevo

$$(-1)^{2-1} \frac{\pi^{2 \cdot 2 - 2}}{(2 \cdot 2 - 1)!} = -\frac{\pi^2}{6}\ .$$

Vpravo je tento koeficient, po formálním roznásobení,

$$-\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}\ .$$

Tedy

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}\ .$$

Úloha 6 *V čem je Eulerův argument nerigorózní?*

• *Poznámka o divergentních řadách.* Řadě $\sum a_n$, to jest posloupnosti $(a_n) \subset \mathbb{R}$, lze přiřadit její „součet“ i mnoha jinými způsoby, než jen jako limitu

$$\lim\ s_n = \lim\,(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$$

posloupnosti částečných součtů. Jak je popsáno v knize V. S. Varadarajana *Euler Through Time: A New Look at Old Themes*, AMS, 2006, začal s tím již L. Euler, který třeba odvodil zobecněnou sumací, že

$$1 - 1! + 2! - 3! + 4! - \ldots \text{ „="} \int_0^1 \frac{e^{1-1/t}}{t}\,\mathrm{dt} \approx 0.59637\ldots\,.$$

Jako ilustraci uvedeme dvě sumační metody.

$$\text{(Abel)}\quad \lim_{x\to 1^-}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = s \;\Rightarrow\; \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ „="}\ s\,.$$

Abelovský součet řady $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$ je tedy

$$\lim_{x\to 1^-}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n = \lim_{x\to 1^-}\frac{1}{1+x} = \frac{1}{2}\,.$$

Jiná metoda je ($s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$)

$$\text{(Cesàro)}\quad \lim_{n\to\infty}\frac{s_1 + s_2 + \cdots + s_n}{n} = s \;\Rightarrow\; \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ „="}\ s\,,$$

Pro $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} = 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$ je $(s_n) = (1, 0, 1, 0, \ldots)$ a cesàrovský součet vychází opět jako $\frac{1}{2}$. Této oblasti matematické analýzy se věnuje zajímavá monografie G. H. Hardyho *Divergent Series*, Oxford University Press, 1949 .

Úloha 7 *Nalezněte abelovský a cesàrovský součet řady*

$$1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 - \ldots\,.$$

• *Absolutně konvergentní číselné řady.* Řekneme, že řada $\sum a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *absolutně konverguje* (je to *AK řada*), pokud konverguje řada $\sum |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, tedy

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < +\infty \ .$$

Úloha 8 *Dokažte, že každá absolutně konvergentní řada konverguje.*

Úloha 9 *Pro které $q \in \mathbb{R}$ absolutně konverguje geometrická řada $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$?*

Pojem (AK) řady nyní rozšíříme. Nechť A je nekonečná spočetná množina. Pak *řadou* $\sum_{x\in A} a_x$ *(na A)* budeme rozumět každou funkci $a\colon A \to \mathbb{R}$, kde pro $x \in A$ místo $a(x)$ stále píšeme a_x. Řekneme, že tato řada je *obecná AK řada*, když

$$\exists\, c > 0\ \forall\, \text{konečnou množinu } B \subset A : \sum_{x\in B} |a_x| < c \ .$$

Následující věta ukazuje, že nová definice AK řad je ekvivalentní původní definici a že pro AK řady platí komutativní zákon.

Věta 10 (o AK řadách) *Nechť $\sum_{x\in A} a_x$ je řada na A. Pak $\sum_{x\in A} a_x$ je obecná AK řada, právě když pro libovolnou bijekci $\pi\colon \mathbb{N} \to A$ je klasická řada*

$$B(\pi) = \sum_{n=1}^{\infty} b(\pi)_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n, \quad b_n := a_{\pi(n)} \ ,$$

AK *řada. Všechny řady $B(\pi)$ jsou pak* AK *a mají týž součet, nezávislý na bijekci π.*

Pro obecnou AK řadu $\sum_{x\in A} a_x$ tak definujeme její *součet* jako součet $\sum b_n$ řady $\sum b_n$ s $b_n := a_{\pi(n)}$ pro libovolnou bijekci $\pi\colon \mathbb{N} \to$

A. Známou Riemannovu větu, že součet konvergentní ale ne AK řady lze přerovnáním vhodnou bijekcí $\pi\colon \mathbb{N}\to\mathbb{N}$ libovolně změnit, připomeneme jen následující úlohou.

Úloha 11 *Uvažte řadu*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n := 1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \dots\ .$$

Dokažte, že má součet $\sum a_n = 0$. *Nalezněte ale permutace (bijekce)* $\pi, \rho\colon \mathbb{N}\to\mathbb{N}$, *že*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)} = +\infty \ \ a \ \ \sum_{n=1}^{\infty} a_{\rho(n)} = -\infty\ .$$

$\sum_{x\in A} a_x$ a $\sum_{y\in B} b_y$ buďte dvě (obecné) řady. Jejich *součin*, či *součinová řada*, je řada

$$\sum_{(x,y)\in A\times B} a_x b_y\ .$$

Věta 12 (součin AK řad) *Nechť* $\sum_{x\in A} a_x$ *a* $\sum_{y\in B} b_y$ *jsou obecné* AK *řady se součty*

$$r := \sum_{x\in A} a_x \in \mathbb{R} \ \ a \ \ s := \sum_{y\in B} b_y \in \mathbb{R}\ .$$

Pak i jejich součin je obecná AK *řada a má součet* rs.

Uvedeme dvě aplikace této věty. První je důkaz základní identity pro exponenciální funkci.

Tvrzení 13 (exponenciála) *Pro* $x\in\mathbb{R}$ *nechť*

$$\exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \dots\ .$$

Pak pro každé $x, y \in \mathbb{R}$ platí identita

$$\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)\ .$$

Důkaz. Skutečně, máme rovnosti součtů řad

$$\begin{aligned}
\exp(x)\exp(y) &\overset{\text{def. expu}}{=} \sum_{m=0}^{\infty}\frac{x^m}{m!}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^n}{n!} \\
&\overset{\text{věta 12}}{=} \sum_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}\frac{x^m}{m!}\cdot\frac{y^n}{n!} \\
&\overset{\text{věta 10}}{=} \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{k}\frac{x^l}{l!}\cdot\frac{y^{k-l}}{(k-l)!} \\
&\overset{\text{algebra}}{=} \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l}x^l y^{k-l} \\
&\overset{\text{binom. věta}}{=} \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(x+y)^k \\
&\overset{\text{def. expu}}{=} \exp(x+y)\ .
\end{aligned}$$

□

Druhou aplikací věty 12 je jeden z důkazů nekonečnosti počtu prvočísel.

Tvrzení 14 (prvočísel je ∞ mnoho) *Množina prvočísel*

$$\mathbb{P} := \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, \ldots\}$$

je nekonečná.

Důkaz. Předpokládejme pro spor, že množina $\mathbb{P}$ je konečná. Pak ale máme vskutku spor:

$$\mathbb{R} \ni \prod_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{1-\frac{1}{p}} = \underbrace{\prod_{p\in\mathbb{P}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{p^k}}_{\text{řada } R} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty \; .$$

První rovnost jen používá vzorec pro součet geometrické řady. Výraz $\prod_{p\in\mathbb{P}} \sum_{k=0}^{\infty} p^{-k}$ je konečný součin AK řad, což je podle věty 12 (přesněji podle jejího rozšíření na konečné součiny) obecná AK řada R se součtem rovným součinu součtů řad $\sum_{k=0}^{\infty} p^{-k}$. Ale každé $n \in \mathbb{N}$ je součinem mocnin různých prvočísel, takže řada R obsahuje pro každé $n \in \mathbb{N}$ sčítanec $\frac{1}{n}$ alespoň jednou (podle Základní věty aritmetiky ho obsahuje právě jednou). Tím dostáváme odhad pro součty $R \geq \sum \frac{1}{n}$. Harmonická řada $\sum \frac{1}{n}$ však diverguje, což dává spor. $\Box$

• *Zúplnění* MP*ů a p-adická čísla.* V přednášce 2 byly zmíněny součty řad v metrickém prostoru $M_p := (\mathbb{Q}, |x-y|_p)$ s p-adickou metrikou a navazovaly na to dvě úlohy. Problém ale je, že tento MP není úplný (a ty dvě úlohy tak nemají dobrý smysl). Pro doplnění teď stručně popíšeme zúplnění metrických prostorů a jeho strukturu pro MP M_p.

Věta 15 (existence zúplnění) *Pro každý* MP (M,d) *existuje* MP (N,e) *s následujícími vlastnostmi.*

1. (N,e) *je úplný* MP, *tj. každá Cauchyova posloupnost* $(a_n) \subset N$ *má limitu* $\lim a_n \in N$.

2. $M \subset N$ *(přesněji viz níže),* $d = e \,|\, (M \times M)$ *(metrika* d *je*

restrikce metriky e) a M je hustá v N, takže pro každý bod $b \in N$ existuje taková posloupnost $(a_n) \subset M$, že $\lim a_n = b$.

Navíc každý jiný MP (N', e') *s vlastnostmi 1 a 2 je izometrický* MP*u* (N, e).

Důkaz. (Jen náčrt.) Nechť C_M je množina všech Cauchyových posloupností v (M, d) a $\sim$ je relace ekvivalence na C_M daná jako

$$(a_n) \sim (b_n) \iff \lim d(a_n,\, b_n) = 0\ .$$

Pak položíme

$$N := C_M/{\sim}$$

a M do N vnoříme pomocí $M \ni a \mapsto [(a, a, \dots)] \in N$. Metriku e definujeme jako

$$e([(a_n)],\, [(b_n)]) := \lim d(a_n,\, b_n)\ .$$

$\square$

Toto zúplnění můžeme pro těleso zlomků $\mathbb{Q}$ s p-adickou normou $|\cdot|_p$ provést následujícím explicitním způsobem. Položíme

$$\mathbb{Q}_p := \{\textstyle\sum_{n=k}^{\infty} a_n p^n \mid k \in \mathbb{Z},\, a_n \in \{0,\, 1,\, \dots,\, p-1\},\, a_k > 0\}\ ,$$

$0_p := 0p^0 + 0p^1 + \dots$ a $\mathrm{ord}_p(\sum_{n=k}^{\infty} a_n p^n) := k$, s $\mathrm{ord}_p(0_p) := +\infty$. Tyto nekonečné p-adické rozvoje mezi sebou sčítáme, odečítáme, násobíme a dělíme zřejmým způsobem, s přenosy p-adických cifer do vyšších řádů. Například

$$\begin{aligned}
&(2 \cdot 3^{-1} + 0 \cdot 3^0 + 2 \cdot 3^1 + \dots) \times (2 \cdot 3^0 + 2 \cdot 3^1 + 1 \cdot 3^2 + \dots)\\
&= (2 \cdot 2) \cdot 3^{-1} + (2 \cdot 2 + 0 \cdot 2) \cdot 3^0 + (2 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 2 \cdot 2) \cdot 3^1 + \dots\\
&= 4 \cdot 3^{-1} + 4 \cdot 3^0 + 6 \cdot 3^1 + \dots = (1 \cdot 3^0 + 1 \cdot 3^1) \cdot 3^{-1} +\\
&+ (1 \cdot 3^0 + 1 \cdot 3^1) \cdot 3^0 + (2 \cdot 3^1) \cdot 3^1 + \dots\\
&= 1 \cdot 3^{-1} + 2 \cdot 3^0 + 1 \cdot 3^1 + \dots
\end{aligned}$$

nebo

$$
\begin{aligned}
&(2\cdot 3^{-1}+0\cdot 3^{0}+2\cdot 3^{1}+\dots)+(2\cdot 3^{0}+2\cdot 3^{1}+1\cdot 3^{2}+\dots)\\
&=2\cdot 3^{-1}+(0+2)\cdot 3^{0}+(2+2)\cdot 3^{1}+(\dots)\cdot 3^{2}+\dots\\
&=2\cdot 3^{-1}+2\cdot 3^{0}+1\cdot 3^{1}+(1+\dots)\cdot 3^{2}+\dots\ .
\end{aligned}
$$

Dále položíme $1_p := 1\cdot p^0+0\cdot p^1+0\cdot p^2+\dots$ a, pro $\alpha := \sum_{n=k}^{\infty} a_n p^n$,

$$|\alpha|_p := (1/p)^{\mathrm{ord}_p(\alpha)}\ .$$

Též $|0_p|_p := 0$.

Tvrzení 16 (o $\mathbb{Q}_p$) *Algebraická struktura*

$$\mathbb{Q}_p = (\mathbb{Q}_p,\ 0_p,\ 1_p,\ +,\ \times,\ |\cdot|_p)$$

je úplné normované těleso. Říká se mu těleso p-adických čísel.

$\mathbb{Q}_p$ je zúplnění tělesa zlomků $\mathbb{Q}$ vzhledem k p-adické normě.

DĚKUJI ZA POZORNOST!

Úlohy za dom. cv. jsou: 3, 5, 7, 8 a 11. Deadline je (do konce dne) 5. 4. 2022