MATEMATICKÁ ANALÝZA 3 (NMAI056)
letní semestr 2021/22
přednášející: Martin Klazar

PŘEDNÁŠKA 11 (6. 5. 2021). ÚVOD DO KOMPLEXNÍ ANALÝZY, ČÁST 3. OBECNÝ BASILEJSKÝ PROBLÉM

• *Věta o integrálu* $\int_{\partial R}$. Navážeme na poslední větu uvedenou v minulé přednášce a dokážeme základní vlastnosti integrálu $\int_{\partial R} f$, g pro holomorfní funkce $f, g\colon \mathbb{C} \setminus A \to \mathbb{C}$, kde $A \subset \mathrm{int}(R)$ je kompaktní množina a $R \subset \mathbb{C}$ je obdélník.

Věta 1 (vlastnosti $\int_{\partial R}$**)** *Důležité vlastnosti jsou tři.*

1. *(linearita) Jsou-li R, A, f a g jako výše, pak pro každé $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ je*

$$\int_{\partial R}(\alpha f + \beta g) = \alpha \int_{\partial R} f + \beta \int_{\partial R} g\ .$$

2. *(rozšíření Cauchy–Goursatovy věty) Když R, $A = \{a\} \subset \mathbb{C}$ a f jsou jako výše a funkce f je na nějakém prstencovém okolí bodu a omezená, pak*

$$\int_{\partial R} f = 0\ .$$

3. *Pro každé $a \in \mathbb{C}$ a každý obdélník $R \subset \mathbb{R}$ s $a \in \mathrm{int}(R)$ je*

$$\int_{\partial R} \frac{1}{z-a} = \rho\ ,$$

kde $\rho = 2\pi i$ je dříve zavedená konstanta.

Důkaz. 1. Tuto linearitu jsme už vlastně dokázali dříve, v poslední větě předminulé přednášky.

2. Vezměme nějaké obdélníky R_n obsahující bod a ve svých vnitřcích a smršťujme je k a. ML odhady integrálů $\int_{\partial R_n} f$ pak ukazují, vzhledem k obv$(R_n) \to 0$ pro $n \to \infty$ a omezenosti $|f|$ na prstencovém okolí bodu a, že tyto integrály jdou k 0, a tak $\int f_{\partial R} = 0$.

3. Když je S čtverec s vrcholy $\pm 1 \pm i$ a $a + S$ je jeho posunutá kopie, pak podle předešlé věty, definice $\int_{\partial R}$ a definice konstanty ρ máme, že

$$\int_{\partial R} \frac{1}{z-a} = \rho \int_{\partial(a+S)} \frac{1}{z-a} = \int_{\partial S} \frac{1}{z} = \rho \ .$$

□

Úloha 2 *Nechť R je obdélník, $a \in \mathrm{int}(R)$ je bod a $k \geq 2$ je celé číslo. Pak*

$$\int_{\partial R} \frac{1}{(z-a)^k} = 0 \ .$$

• *Cauchyův vzorec.* Pro jednoduchost ho dokážeme jen pro celé funkce.

Věta 3 (Cauchyův vzorec) *Nechť $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je celá funkce, $\rho = 2\pi i$ je dříve definovaná konstanta, $R \subset \mathbb{C}$ je obdélník a bod $a \in \mathrm{int}(R)$. Pak*

$$f(a) = \frac{1}{\rho} \int_{\partial R} \frac{f(z)}{z-a} \ .$$

Důkaz. Existence derivace $f'(a)$ implikuje omezenost funkce

$$\frac{f(z) - f(a)}{z-a}$$

na nějakém prstencovém okolí bodu a. Podle vlastností 1–3 věty 1 máme, že

$$
\begin{aligned}
0 &\overset{\text{vl. 2}}{=} \int_{\partial R} \frac{f(z)-f(a)}{z-a} \overset{\text{vl. 1}}{=} \int_{\partial R} \frac{f(z)}{z-a} - f(a)\int_{\partial R} \frac{1}{z-a} \\
&\overset{\text{vl. 3}}{=} \int_{\partial R} \frac{f(z)}{z-a} - f(a)\rho\;.
\end{aligned}
$$

Protože $\rho \neq 0$ (věta 6 v minulé přednášce), malou úpravou ihned dostaneme Cauchyův vzorec. $\square$

Důkaz Liouvilleovy věty. Nechť $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je celá a omezená funkce, takže $|f(z)| < c$ pro každé $z \in \mathbb{C}$ a nějakou reálnou konstantu $c > 0$. Nechť $a, b \in \mathbb{C}$ jsou dva (různé) body. Podle úlohy 4 pro každé dostatečně velké $s \in \mathbb{N}$ najdeme takový čtverec $S \subset \mathbb{C}$ se stranou délky s, že $a, b \in \mathrm{int}(S)$ a pro každé $z \in \partial S$ je

$$
|z-a|,\ |z-b| > \frac{s}{3} = \frac{\mathrm{obv}(S)}{12}\;.
$$

Podle Cauchyova vzorce a linearity $\int_{\partial R}$ je

$$
\begin{aligned}
f(a)-f(b) &= \frac{1}{\rho}\int_{\partial S} \frac{f(z)}{z-a} - \frac{1}{\rho}\int_{\partial S} \frac{f(z)}{z-b} \\
&= \frac{a-b}{\rho}\int_{\partial S} \frac{f(z)}{(z-a)(z-b)}\;.
\end{aligned}
$$

Podle ML odhadu je poslední integrál v absolutní hodnotě nanejvýš

$$
\frac{c}{\mathrm{obv}(S)^2/144} \cdot \mathrm{obv}(S) = \frac{144c}{4s} = \frac{36c}{s} \to 0 \ \text{ pro } \ s \to \infty\;.
$$

Tedy $f(a) = f(b)$ a f je konstantní funkce. $\square$

Úloha 4 *Nechť $a, b \in \mathbb{C}$. Sestrojte pro každé velké $s \in \mathbb{N}$ čtverec $S \subset \mathbb{C}$ se stranou délky s, že $a, b \in \mathrm{int}(S)$ a pro každé $z \in \partial S$ jsou vzdálenosti $|z-a|, |z-b|$ větší než $s/3$.*

Důkaz analytičnosti každé celé funkce. Nechť $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je celá funkce, číslo $a \in \mathbb{C}$ je libovolné a R je tak velký obdélník, že $0, a \in \mathrm{int}(R)$ a pro každé $z \in \partial R$ je

$$\left|\frac{a}{z}\right| = \frac{|a|}{|z|} < \frac{1}{2} \ \text{ a } \ |z-a| > 1$$

(úloha 5). Nechť $m \in \mathbb{N}$. Pomocí Cauchyova vzorce a identity

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^m + \frac{x^{m+1}}{1-x}$$

dostáváme, že

$$\begin{aligned}
f(a) &\stackrel{\text{C. vzorec}}{=} \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial R} \frac{f(z)}{z-a} \\
&\stackrel{\text{identita}}{=} \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial R} \frac{f(z)}{z}\bigg(\sum_{n=0}^{m} (a/z)^n + \frac{(a/z)^{m+1}}{1-a/z}\bigg) \\
&\stackrel{\text{linearita } \int_{\partial R}}{=} \sum_{n=0}^{m}\bigg(\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial R} \frac{f(z)}{z^{n+1}}\bigg)a^n + \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial R} \frac{f(z)(a/z)^{m+1}}{z-a} \\
&\stackrel{\text{označení}}{=:} \sum_{n=0}^{m} c_n a^n + \frac{I_{m+1}}{2\pi i}\ .
\end{aligned}$$

ML odhad integrálu I_{m+1} ukazuje, že jsme hotovi: pro $m \to \infty$ je

$$|I_{m+1}| \le \max_{z \in \partial R} |f(z)| \cdot \frac{(1/2)^{m+1}}{1} \cdot \mathrm{obv}(R) \to 0\ .$$

Pro každé $a \in \mathbb{C}$ je tedy

$$f(a) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n a^n, \quad \text{kde} \quad c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S} \frac{f(z)}{z^{n+1}} \, ,$$

s libovolným obdélníkem S obsahujícím uvnitř bod 0. $\square$

Úloha 5 *Ukažte, že pro každé $a \in \mathbb{C}$ existuje takový obdélník R, že $0, a \in \mathrm{int}(R)$ a pro každé $z \in \partial R$ je $|a/z| < \frac{1}{2}$ a $|z-a| > 1$.*

• *Meromorfní funkce a rezidua.* Podstatně zobecníme část 3 věty 1 o konstantě ρ. Množina $A \subset \mathbb{C}$ je *diskrétní*, pokud v každé kouli $B(z, r) \subset \mathbb{C}$ leží jen konečně mnoho jejích prvků. Holomorfní funkci

$$f\colon U \setminus A \to \mathbb{C} \, ,$$

kde $A \subset U$ je diskrétní, nazveme *meromorfní funkcí* a A nazveme *množinou jejích pólů*, když každý bod $a \in A$ má okolí $U_a \subset U$ s $U_a \cap A = \{a\}$, že pro nějakou holomorfní funkci $g_a\colon U_a \to \mathbb{C}$ a nějaká čísla $k_a \in \mathbb{N}_0$ a $c_{j,a} \in \mathbb{C}$, $j = 1, 2, \ldots, k_a$, pro každé $z \in U_a \setminus \{a\}$ je

$$f(z) = g_a(z) + \sum_{j=1}^{k_a} \frac{c_{j,a}}{(z-a)^j} \, .$$

Pro $k_a = 0$ se suma definuje jako 0 a funkce $f = g_a$ pak je holomorfní na U_a. Koeficient $c_{1,a}$ je takzvané *reziduum funkce f v bodě a* a označíme ho jako

$$\mathrm{res}(f,\, a) := c_{1,\,a} \, .$$

Z Cauchyova vzorce plyne, že $\mathrm{res}(f, a)$ je jednoznačně určené funkcí f (úloha 7).

Věta 6 (reziduová) *Předpokládáme, že $f\colon U\setminus A\to\mathbb{C}$ je meromorfní funkce s množinou pólů A a že $R\subset U$ je obdélník, na jehož hranici ∂R neleží žádný bod z A. Potom platí rovnost*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial R} f=\sum_{a\in A\,\cap\,\mathrm{int}(R)}\mathrm{res}(f,\,a)=\sum_{a\in A\,\cap\,R}\mathrm{res}(f,\,a)$$

(oba součty jsou konečné). Takže integrál funkce f přes hranici obdélníka R, dělený $2\pi i$, se rovná součtu reziduí funkce f v pólech ležících uvnitř R.

Důkaz. Nekonečnost průniku $A\cap R$ by znamenala existenci limitního bodu množiny A, ve sporu s její diskrétností (úloha 8). Hořejší sumy jsou tedy konečné. Vezmeme vzájemně disjunktní čtverce

$$S_a\subset\mathrm{int}(R)\cap U_a,\ a\in R\cap A\ ,$$

kde U_a je okolí bodu a z definice meromorfnosti a S_a má střed v a. Obdélník R pak rozdělíme na obdélníky zahrnující všechny tyto čtverce S_a a dostaneme, že

$$\begin{aligned}\int_{\partial R} f &= \sum_{a\in A\,\cap\,R}\int_{\partial S_a} f=\sum_{a\in A\,\cap\,R}\int_{\partial S_a}\left(g_a(z)+\sum_{j=1}^{k_a}\frac{c_{j,a}}{(z-a)^j}\right)\\ &= \sum_{a\in A\,\cap\,R} 2\pi i\cdot\mathrm{res}(f,\,a)\end{aligned}$$

a jsme hotovi. První rovnost plyne pomocí části 3 věty o vlastnostech $\int_u$ již dvakrát použitým argumentem (úloha 9). Druhá rovnost plyne z definice meromorfní funkce. Třetí rovnost plyne z linearity integrálu, Cauchy–Goursatovy věty, části 3 věty 1 a z úlohy 2. $\square$

Úloha 7 *Proč je hodnota rezidua funkce f v bodě a jednoznačně určená funkcí f?*

Úloha 8 *Dokažte, že každá nekonečná podmnožina obdélníku R má limitní bod.*

Úloha 9 *Ukažte, jak rozdělit daný obdélník R, s předepsanými disjunktními obdélníky $R_1, R_2, \ldots, R_k$ obsaženými v $\mathrm{int}(R)$, vhodnými přímkami na podobdélníky zahrnující všechny R_j tak, že platí první rovnost v důkazu reziduové věty.*

Úloha 10 *Co je pointou následujícího matematického vtipu pro pokročilé? (Je nutné formulovat ho anglicky.)*

> *Did you know that the contour integral of f around the boundary of France is zero? ??? Because all Poles are in the eastern Europe!*

• *Řešení zobecněného Basilejského problému.* Užitečnost reziduové věty a komplexní analýzy nyní ilustrujeme sečtením řady ($k \in \mathbb{N}$)

$$\zeta(2k) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}}\ .$$

V minulých přednáškách jsme Fourierovými řadami spočítali, že $\zeta(2) = \pi^2/6$. Tento vzorec teď zobecníme pro $\zeta(2k)$. Nejprve ale dokážeme dva pomocné výsledky.

Tvrzení 11 (o funkci $F(z)$) *Nechť*

$$F(z) := \frac{2\pi i}{e^{2\pi i z} - 1} : \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z} \to \mathbb{C}\ .$$

Funkce F je meromorfní s množinou pólů $\mathbb{Z}$. V každém celém čísle má reziduum rovné 1.

Důkaz. (Stručný důkaz.) Funkce $f(z) := e^{2\pi iz} - 1$ je celá (je definovaná součtem mocninné řady) a $f(z) = 0$, právě když $z \in \mathbb{Z}$. Pro každé $n \in \mathbb{Z}$ máme lokální rozvoj

$$f(z) = 2\pi i(z-n) + a_2(z-n)^2 + \ldots$$

se středem v n, protože $f'(n) = 2\pi i$. V prstencovém okolí n tedy je

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{2\pi i}{f(z)} = \frac{1}{z-n} \cdot \frac{1}{1 + (a_2/2\pi i)(z-n) + \cdots} \\ &= (z-n)^{-1} + b_0 + b_1(z-n) + \cdots \end{aligned}$$

a reziduum funkce $F(z)$ v n se rovná 1. $\square$

Lemma 12 *Nechť $F(z)$ je jako v předešlém tvrzení a $S_N \subset \mathbb{C}$, $N \in \mathbb{N}$, je čtverec s vrcholy $(N + \frac{1}{2})(\pm 1 \pm i)$. Pak existuje konstanta $c > 0$, že*

$$\forall\, N \in \mathbb{N}\; \forall\, z \in \partial S_N :\; |F(z)| \le c\,.$$

Důkaz. Protože $F(z) = 2\pi i/(e^{2\pi iz} - 1)$, stačí patrně pro uvedené z odříznout $e^{2\pi iz} - 1$ od 0. Pro $z \in \partial S_N$ s $|\mathrm{im}(z)| \ge 1$ je

$$\begin{aligned} \left|e^{2\pi iz} - 1\right| &\ge \left|\left|e^{2\pi iz}\right| - 1\right| = \left|e^{\mathrm{re}(2\pi iz)} - 1\right| \\ &= \left|e^{-2\pi\cdot\mathrm{im}(z)} - 1\right| \ge \min\left(1 - e^{-2\pi},\, e^{2\pi} - 1\right) \\ &= 1 - e^{-2\pi} > 0\,. \end{aligned}$$

Pro $z \in \partial S_N$ s $|\mathrm{im}(z)| \le 1$ využijeme, že funkce $e^{2\pi iz}$ je 1-periodická, a proto se lze redukcí modulo 1 přenést do pásu P daného podmínkou $0 \le \mathrm{re}(z) \le 1$. Pak $z = \frac{1}{2} + ix$, kde $x \in \mathbb{R}$ s $|x| \le 1$, a

$$\left|e^{2\pi iz} - 1\right| = \left|e^{\pi i}e^{-2\pi x} - 1\right| = \left|e^{-2\pi x} + 1\right| \ge 1 + e^{-2\pi}\,.$$

Lze tedy položit $c = 2\pi/(1 - e^{-2\pi})$. $\square$

Věta 13 (sečtení řady $\sum n^{-2k}$) *Pro každé $k \in \mathbb{N}$ existuje kladný zlomek $\alpha_k \in \mathbb{Q}$, že*

$$\zeta(2k) = 1 + \frac{1}{2^{2k}} + \frac{1}{3^{2k}} + \frac{1}{4^{2k}} + \cdots = \alpha_k \pi^{2k} \ .$$

Důkaz. Existují zlomky $B_0, B_1, \ldots$, tak zvaná *Bernoulliova čísla*, že

$$\frac{x}{e^x - 1} =: \sum_{r=0}^{\infty} \frac{B_r x^r}{r!} \in \mathbb{Q}[[x]]$$

(úloha 14). Vezmeme nám již známou meromorfní funkci

$$F(z) = \frac{2\pi i}{e^{2\pi i z} - 1} \colon \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z} \to \mathbb{C} \ ,$$

která má podle tvrzení 11 póly v $\mathbb{Z}$ a v nich rezidua $\mathrm{res}(F, n) = 1$ pro každé $n \in \mathbb{Z}$. Když je $f(z)$ holomorfní na okolí bodu $n \in \mathbb{Z}$, pak zřejmě $\mathrm{res}(fF, n) = f(n)$ (úloha 15). Položíme $f(z) := 1/z^{2k}$ a pro $N \in \mathbb{N}$ jako S_N označíme nám již známý čtverec s vrcholy $(N + \frac{1}{2})(\pm 1 \pm i)$. Podle reziduové věty je

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S_N} \frac{F(z)}{z^{2k}} &= \sum_{n=-N}^{N} \mathrm{res}(F(z) z^{-2k},\ n) \\ &= \mathrm{res}(F(z) z^{-2k},\ 0) + 2 \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^{2k}} \ . \end{aligned}$$

Podle lemmatu 12 existuje konstanta $c > 0$, že pro každé $N \in \mathbb{N}$ je $z \in \partial S_N \Rightarrow |F(z)| \leq c$. Podle ML odhadu je tedy hořejší integrál v absolutní hodnotě nanejvýš

$$\max_{z \in \partial S_N} \left| \frac{F(z)}{z^{2k}} \right| \cdot \mathrm{obv}(S_N) \leq \frac{c}{N^{2k}} \cdot (8N + 4) \to 0 \ \text{ pro } \ N \to \infty \ .$$

Tedy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} = -\frac{1}{2} \cdot \operatorname{res}(F(z)z^{-2k},\ 0)\ .$$

Podle definic funkce $F(z)$ a Bernoulliových čísel máme, že

$$F(z)z^{-2k} = \frac{2\pi iz \cdot z^{-1-2k}}{e^{2\pi iz} - 1} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{B_r(2\pi i)^r z^{r-1-2k}}{r!}\ .$$

Proto (vezmeme $r = 2k$)

$$\operatorname{res}(F(z)z^{-2k},\ 0) = \frac{(-1)^k B_{2k}(2\pi)^{2k}}{(2k)!}$$

a součet řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} = \underbrace{\frac{2^{2k-1}}{(2k)!}(-1)^{k+1} B_{2k}}_{\alpha_k} \cdot \pi^{2k}$$

je skutečně racionální násobek čísla π^{2k}. □

Úloha 14 *Dokažte, že Bernoulliova čísla jsou zlomky.*

Úloha 15 *Dokažte, že když je $f(z)$ holomorfní na okolí bodu $n \in \mathbb{Z}$, pak* $\operatorname{res}(fF, n) = f(n)$.

Pro $k \geq 2$ je $B_{2k-1} = 0$ (úloha 16). Dále $B_0 = 1$, $B_1 = -\frac{1}{2}$, $B_2 = \frac{1}{6}$, $B_4 = -\frac{1}{30}$, $B_6 = \frac{1}{42}$ a podobně dále (úloha 17). Předchozí důkaz je převzat z knihy P. D. Laxe a L. Zalcmana *Complex Proofs of Real Theorems*, AMS (The American Mathematical Society), Providence, RI (Rhodes Island), 2012. O komplexní analýze se lze dále poučit ve skriptech J. Veselého *Komplexní analýza pro učitele*, Karolinum, Praha, 2000.

Úloha 16 *Dokažte, že Bernoulliova čísla s lichými indexy* > 1 *jsou nulová.*

Úloha 17 *Ověřte výše uvedené hodnoty Bernoulliových čísel.*

DĚKUJI ZA POZORNOST!

Úlohy za dom. cv. jsou: 4, 5, 10 a 14. Deadline je (do konce dne) 17. 5. 2022