MATEMATICKÁ ANALÝZA 3 (NMAI056)
letní semestr 2021/22
přednášející: Martin Klazar

PŘEDNÁŠKA 10 (29. 4. 2022). ÚVOD DO KOMPLEXNÍ ANALÝZY, ČÁST 2

• *Cauchyova–Goursatova věta pro obdélníky a lineární funkce.* Budeme pokračovat v důkazu věty o analytičnosti celistvé funkce a Liouvilleovy věty, které jsme uvedli v poslední přednášce. Pro $k \in \mathbb{N}$ a úsečku $u \subset \mathbb{C}$ jejím k*-ekvidělením* rozumíme dělení u na k podúseček stejné délky $|u|/k$, které je dané obrazy dělení $0 < \frac{1}{k} < \frac{2}{k} < \cdots < \frac{k-1}{k} < 1$ jednotkového intervalu.

Úloha 1 *Nechť $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ s $a \neq b$. Dokažte z definice integrálu, že*

$$\int_{ab} (\alpha z + \beta) = \alpha \left(\frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2} \right) + \beta(b - a) = g(b) - g(a) \ ,$$

kde $g(z) := \alpha z^2/2 + \beta z$. Návod: použijte ekvidělení úsečky ab.

Důsledek 2 (jednoduchá C.–G. věta) *Nechť $\alpha \in \mathbb{C}$, $\beta \in \mathbb{C}$ a $R \subset \mathbb{C}$ je obdélník. Pak*

$$\int_{\partial R} (\alpha z + \beta) = 0 \ .$$

Důkaz. Nechť a, b, c, d jsou kanonické vrcholy obdélníku R a nechť $f(z) := \alpha z + \beta$. Podle definice $\int_{\partial R}$ a předešlé úlohy je

$$\int_{\partial R} f = g(b) - g(a) + g(c) - g(b) + g(d) - g(c) + g(a) - g(d) = 0 \ .$$

□

Tvrzení 3 ($\int_u$ **a** (R) $\int$) *Nechť $a, b \in \mathbb{C}$ s $a \neq b$, $f\colon ab \to \mathbb{C}$ je spojitá funkce a $\varphi(t) := t(b-a)+a\colon [0,1] \to \mathbb{C}$ je parametrizace definující úsečku $u = ab$. Potom*

$$\begin{aligned}\int_u f &= \int_0^1 f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\ \mathrm{dt} = (b-a)\int_0^1 f(\varphi(t))\ \mathrm{dt} \\ &= (b-a)\bigg(\int_0^1 \mathrm{re}\big(f(\varphi(t))\big)\ \mathrm{dt} + i \cdot \int_0^1 \mathrm{im}\big(f(\varphi(t))\big)\ \mathrm{dt}\bigg)\end{aligned}$$

(kromě prvního integrálu jsou všechny další Riemannovy).

Úloha 4 *Dokažte předešlé tvrzení.*

Pro úplnost uvedeme definici *křivkového integrálu* $\int_\varphi f$, na němž je komplexní analýza založena. Když

$$f\colon U \to \mathbb{C} \ \text{ je funkce a } \ \varphi\colon [a,\, b] \to U$$

je spojitá a po částech hladká funkce, pak *integrál funkce f přes křivku φ* definujeme jako

$$\begin{aligned}\int_\varphi f &:= \int_a^b f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\ \mathrm{dt} \\ &= \int_a^b \mathrm{re}\big(f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\big)\ \mathrm{dt} + i \cdot \int_a^b \mathrm{im}\big(f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\big)\ \mathrm{dt}\ ,\end{aligned}$$

pokud poslední dva (reálné) Riemannovy integrály existují. Náš „úsečkový integrál“ $\int_u$ je tedy podle tvrzení 3 speciálním případem křivkového integrálu $\int_\varphi$.

Úloha 5 *Nechť $\varphi(t)\colon [0, \frac{1}{2}] \to \mathbb{C}$,*

$$\varphi(t) := e^{2\pi i t} = \sum_{n \geq 0} \frac{(2\pi i t)^n}{n!}\ ,$$

jde o parametrizaci horní jednotkové půlkružnice, a $f(z) := z^2$. *Spočtěte*

$$\int_\varphi f\ .$$

Návod: postupujte podle prvního řádku definice $\int_\varphi$.

• *Konstanta* $\rho = 2\pi i$. Následující věta je nedoceněný pilíř komplexní analýzy: kdyby v ní konstanta ρ vyšla jako 0, žádné Cauchyovy vzorce, které uvedeme příště, by neexistovaly a komplexní analýza by se zhroutila.

Věta 6 (konstanta ρ) *Nechť S je čtverec s vrcholy $\pm 1 \pm i$. Pak*

$$\rho := \int_{\partial S} \frac{1}{z} \neq 0 \ \ \textit{a dokonce}\ \ \mathrm{im}(\rho) \geq 4\ .$$

Důkaz. Kanonické vrcholy čtverce S jsou $a := -1 - i$, $b := 1 - i$, $c := 1 + i$ a $d = -1 + i$. Nechť $p_n = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$ je n-ekvidělení úsečky ab. Protože násobení číslem i je otočení kolem počátku kladným směrem (proti směru hodinových ručiček) o úhel $\pi/2$, je $q_n = ip_n := (ia_0, ia_1, \ldots, ia_n)$ n-ekvidělení úsečky bc. Podobně je $r_n = iq_n = -p_n$, popř. $s_n = ir_n = -ip_n$, n-ekvidělení úsečky cd, popř. da. Překvapivě pro $f(z) = 1/z$ je

$$C(f,\, p_n) = C(f,\, q_n) = C(f,\, r_n) = C(f,\, s_n)\ .$$

Skutečně, rozšíření zlomku číslem i dává

$$\begin{aligned} C(f,\, p_n) &= \sum_{j=1}^{n} \frac{(b-a)/n}{a + j(b-a)/n} = \sum_{j=1}^{n} \frac{(ib-ia)/n}{ia + j(ib-ia)/n} \\ &= \sum_{j=1}^{n} \frac{(c-b)/n}{b + j(c-b)/n} = C(f,\, q_n) \end{aligned}$$

a podobně pro další dvě rovnosti. Dále vzhledem k $b - a = 2$ a $a = -1 - i$ rozšířením zlomku číslem $\frac{2j}{n} - 1 + i$ dostáváme

$$\begin{aligned}
\mathrm{im}(C(f,\, p_n)) &= \mathrm{im}\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{2/n}{-1 - i + 2j/n}\right) \\
&= \mathrm{im}\left(\frac{2}{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{2j/n - 1 + i}{(2j/n - 1)^2 + 1}\right) \\
&= \frac{2}{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{(2j/n - 1)^2 + 1} \geq \frac{2}{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2} = 1\,.
\end{aligned}$$

Tedy, podle úlohy 7,

$$\begin{aligned}
\mathrm{im}(\rho) &= \mathrm{im}\left(\int_{\partial S} \frac{1}{z}\right) = 4 \cdot \mathrm{im}\left(\int_{ab} \frac{1}{z}\right) \\
&= 4 \cdot \lim_{n \to \infty} \mathrm{im}(C(1/z,\, p_n)) \\
&\geq 4 \cdot 1 = 4
\end{aligned}$$

a skutečně $\rho \neq 0$. $\square$

Úloha 7 *Buď dána konvergentní posloupnost komplexních čísel* (z_n). *Dokažte, že* $\mathrm{im}(\lim\, z_n) = \lim \mathrm{im}(z_n)$.

Úloha 8 ($\mathrm{re}(\rho) = 0$**)** *Ukažte, že předchozí důkaz dává i rovnost* $\mathrm{re}(\rho) = 0$.

Úloha 9 ($\rho = 2\pi i$**)** *Nechť opět* $a := -1-i$ *a* $b := 1-i$. *Spočítejte podle tvrzení 3, že*

$$\int_{ab} \frac{1}{z} = \frac{\pi i}{2}\,.$$

Tedy, podle předchozího důkazu,

$$\rho = 4 \cdot \frac{\pi i}{2} = 2\pi i \ .$$

Návod: $\int \frac{1}{1+t^2} = \arctan t$.

Úloha 10 *Nechť* $\varphi(t)\colon [0,1] \to \mathbb{C}$, $\varphi(t) := e^{2\pi it}$ *a* $f(z) := 1/z$. *Spočítejte, že*

$$\int_\varphi f = 2\pi i \ .$$

• *Cauchy–Goursatova věta.* V komplexní analýze to je věta číslo 1: integrál $\int_\varphi f$ holomorfní funkce f přes *jednoduchou uzavřenou křivku* φ (tj. φ je prostá, až na $\varphi(a) = \varphi(b)$, přesněji níže), která leží v definičním oboru funkce f spolu se svým celým vnitřkem, je 0. Speciální případ této věty jsme už dokázali v důsledku 2. Nám ale stačí integrovat jen přes hranice obdélníků a se složitými křivkami se nemusíme trápit.

Připomeneme si, že pro množinu $X \subset \mathbb{C}$ je její *diametr* (čili *průměr*) definovaný jako

$$\mathrm{diam}(X) = \sup(\{|x-y| \mid x,\, y \in X\}) \ .$$

Průměr množiny může být i $+\infty$.

Úloha 11 *Když* A_n,

$$\mathbb{C} \supset A_1 \supset A_2 \supset \dots \ ,$$

jsou neprázdné a uzavřené množiny s $\lim \mathrm{diam}(A_n) = 0$, *pak* $\bigcap_{n=1}^\infty A_n \neq \emptyset$. *Návod: důkaz Baireovy věty.*

Ještě budeme potřebovat konstrukci čtvrtek obdélníka R s kanonickými vrcholy a, b, c, d. Když $e := \frac{a+b}{2}$, $f := \frac{b+c}{2}$, $g := \frac{c+d}{2}$

a $h := \frac{d+a}{2}$ jsou středy stran obdélníka R a $j := \frac{a+c}{2}$ je jeho celkový střed, pak jeho čtyři *čtvrtky* jsou obdélníky A, B, C a D, jejichž kanonické vrcholy jsou, po řadě,

$$(a, e, j, h), (e, b, f, j), (j, f, c, g) \text{ a } (h, j, g, d) .$$

Obdélník R se na čtvrtky rozpadne po rozříznutí podle úseček eg a hf. Pro každou z těchto čtvrtek E patrně platí: $\mathrm{obv}(E) = \frac{1}{2}\mathrm{obv}(R)$ a $\mathrm{diam}(E) = \frac{1}{2}\mathrm{diam}(R)$.

Věta 12 (Cauchy–Goursatova pro obdélníky) *Nechť*

$$f\colon U \to \mathbb{C}$$

je holomorfní funkce a $R \subset U$ je obdélník. Pak

$$\int_{\partial R} f = 0 .$$

Důkaz. Nechť f, U a R jsou, jak je uvedeno. Sestrojíme takové vnořené obdélníky

$$R = R_0 \supset R_1 \supset R_2 \supset \dots ,$$

že pro každé $n \in \mathbb{N}_0$ je R_{n+1} čtvrtka obdélníku R_n a

$$\left| \int_{\partial R_{n+1}} f \right| \geq \frac{1}{4} \left| \int_{\partial R_n} f \right| . \tag{1}$$

Nechť už jsou takové obdélníky $R_0, R_1, \dots, R_n$ definované a A, B, C a D jsou čtvrtky obdélníku R_n. Tvrdíme, že

$$\int_{\partial R_n} f = \int_{\partial A} f + \int_{\partial B} f + \int_{\partial C} f + \int_{\partial D} f . \tag{2}$$

Tato identita plyne použitím třetí části věty o vlastnostech integrálu z minulé přednášky. Po rozvinutí každého integrálu $\int_{\partial A} f, \ldots, \int_{\partial D} f$ jako součtu čtyř integrálů přes strany dostáváme na pravé straně rovnosti (2) 16 členů. Osm z nich odpovídá stranám čtvrtek uvnitř R_n a vzájemně se zruší, protože vytvoří čtyři dvojice opačných orientací stejné úsečky. Zbylých osm členů odpovídá stranám čtvrtek ležícím na ∂R_n a sečtou se na integrál na levé straně rovnosti (2). Z rovnosti (2) plyne podle trojúhelníkové nerovnosti, že pro nějakou čtvrtku $E \in \{A, B, C, D\}$ je $|\int_{\partial E} f| \geq \frac{1}{4}|\int_{\partial R_n} f|$. Položíme tedy $R_{n+1} = E$.

Podle úlohy 11 existuje bod z_0, že

$$z_0 \in \bigcap_{n=0}^{\infty} R_n \ .$$

Protože $R_0 = R \subset U$, je i $z_0 \in U$. Nyní použijeme existenci derivace $f'(z_0)$. Pro dané $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$, že $B(z_0, \delta) \subset U$ a pro nějakou funkci $\Delta\colon B(z_0, \delta) \to \mathbb{C}$ pro každé $z \in B(z_0, \delta)$ je $|\Delta(z)| < \varepsilon$ (viz též úlohu 13) a

$$f(z) = \underbrace{f(z_0) + f'(z_0) \cdot (z - z_0)}_{g(z)} + \underbrace{\Delta(z) \cdot (z - z_0)}_{h(z)} \ .$$

Uvážíme tyto funkce $g(z)$ a $h(z)$. Je jasné, že $g(z)$ je lineární a $h(z) = f(z) - g(z)$ je spojitá (na $B(z_0, \delta)$). Nechť $n \in \mathbb{N}_0$ je tak velké, že $R_n \subset B(z_0, \delta)$ (jen zde potřebujeme, že $\lim \mathrm{diam}(R_n) = 0$, pro existenci bodu z_0 to není podstatné, viz úlohu 14). Podle linearity integrálu a důsledku 2 máme

$$\int_{\partial R_n} f = \int_{\partial R_n} g + \int_{\partial R_n} h \stackrel{\text{D. 2}}{=} \int_{\partial R_n} h \ . \tag{3}$$

Platí odhad

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\partial R_n} h \right| &\overset{\text{ML odhad}}{\leq} \max_{z \in \partial R_n} |\Delta(z) \cdot (z - z_0)| \cdot \mathrm{obv}(R_n) \\
&< \varepsilon \cdot \mathrm{diam}(R_n) \cdot \mathrm{obv}(R_n) \\
&= \varepsilon \cdot \frac{\mathrm{diam}(R)}{2^n} \cdot \frac{\mathrm{obv}(R)}{2^n} \\
&< \varepsilon \cdot \frac{\mathrm{obv}(R)}{4^n}\,. \qquad (4)
\end{aligned}$$

Zde jsme použili výše zmíněné zmenšení průměru a obvodu na polovinu po čtvrcení a to, že průměr obdélníka je menší než jeho obvod. Podle předchozích výsledků tak máme

$$\frac{1}{4^n}\left| \int_{\partial R} f \right| \overset{\text{n. (1)}}{\leq} \left| \int_{\partial R_n} f \right| \overset{\text{r. (3)}}{=} \left| \int_{\partial R_n} h \right| \overset{\text{n. (4)}}{<} \varepsilon \cdot \frac{\mathrm{obv}(R)^2}{4^n}$$

a $|\int_{\partial R} f| < \varepsilon \cdot \mathrm{obv}(R)^2$. Protože to platí pro každé $\varepsilon > 0$, je $\int_{\partial R} f = 0$. □

Úloha 13 *Jakou hodnotu má funkce $\Delta(z)$ v důkazu v bodě z_0?*

Úloha 14 *Dokažte, že pro neprázdnost průniku v úloze 11 stačí místo nulové limity průměrů předpokládat, že množina A_1 je omezená. Ukažte ale také, že toto neplatí v obecném metrickém prostoru.*

Pozoruhodný důkaz, že? Autorem věty je francouzský matematik *Augustin-Louis Cauchy (1789–1857)*, který během svého exilu pobýval i v Praze. Cauchy však předpokládal spojitost derivace f'. Teprve *Édouard Goursat (1858–1936)* větu v r. 1900 dokázal jen za předpokladu pouhé existence derivace f':

E. Goursat, Sur la définition générale des fonctions analytiques, d'après Cauchy, *Trans. Amer. Math. Soc.* **1** (1900), 14–16.

Nám bude stačit C.–G. věta pro obdélníky, přesněji jejich hranice, ale věta platí pro obecné křivky. Důkaz obecné verze jen načrtneme. Nebudeme ani přesně definovat *vnitřek křivky* a dokazovat jeho existenci.

Věta 15 (Cauchy–Goursatova) *Nechť $f\colon U \to \mathbb{C}$ je holomorfní funkce a $\varphi\colon [a,b] \to U$ je spojitá a po částech hladká funkce, která je prostá, s výjimkou hodnoty $\varphi(a) = \varphi(b)$, a jejíž vnitřek — ta komponenta ve dvojici komponent množiny $\mathbb{C} \setminus \varphi[\,[a,b]\,]$, která je omezená — je podmnožinou množiny U. Pak*

$$\int_\varphi f = 0\ .$$

Náčrt důkazu. V komplexní rovině $\mathbb{C}$ nakreslíme pomocí vodorovných a svislých přímek tak jemnou čtverečkovou síť $\mathcal{M}$, že jistá jednoduchá uzavřená křivka $\psi\colon [a,b] \to U$, jejíž graf běží jen po stranách sítě $\mathcal{M}$, splňuje to, že (i) pro dané $\varepsilon > 0$ je $|\int_\varphi f - \int_\psi f| < \varepsilon$ (křivka ψ dobře aproximuje křivku φ) a (ii) vnitřek křivky ψ je podmnožinou množiny U. Pak

$$\int_\psi f = \sum_{R \in M} \int_{\partial R} f = \sum_{R \in M} 0 = 0\ ,$$

kde M jsou ty elementární obdélníčky sítě $\mathcal{M}$, které leží uvnitř křivky ψ. První rovnost platí ze stejného důvodu, z jakého platí rovnost (2) a první rovnost v (5) níže. Druhá plyne z (ii) a předchozí

C.–G. věty pro obdélníky. Podle (i) tedy $|\int_\varphi f| < \varepsilon$ a protože toto platí pro každé ε, je $\int_\varphi f = 0$. $\square$

Úloha 16 *Podobně jako v úloze 10 nechť* $\varphi(t)\colon [0,1] \to \mathbb{C}$, $\varphi(t) := e^{2\pi i t}$ *(teď parametrizujeme celou jednotkovou kružnici) a* $f(z) := z^k$, *kde* $k \in \mathbb{Z}$ *s* $k \neq -1$. *Spočítejte, že*

$$\int_\varphi f = 0\ .$$

(Neplyne to celé z C.–G. věty!)

• *Nezávislost* $\int$ *na integrovaném obdélníku.* Dokážeme, že v jisté situaci integrál $\int_{\partial R} f$ příliš nezávisí na obdélníku R. Připomeňme si, že každá kompaktní množina $A \subset \mathbb{C}$ je uzavřená a omezená.

Tvrzení 17 (nezávislost $\int_{\partial R} f$ na R) *Nechť* $A \subset \mathrm{int}(R) \cap \mathrm{int}(S)$, *kde* A *je kompaktní množina a* $R, S \subset \mathbb{C}$ *jsou obdélníky, a nechť* $f\colon \mathbb{C} \setminus A \to \mathbb{C}$ *je holomorfní funkce. Pak*

$$\int_{\partial R} f = \int_{\partial S} f\ .$$

Důkaz. Nechť A, R, S a f jsou, jak je uvedeno, a nechť nejprve i $S \subset \mathrm{int}(R)$. Prodloužením stran obdélníku S rozdělíme obdélník R na devět obdélníků $R_1, R_2, \ldots, R_8, S$. Pak vskutku máme, že

$$\int_{\partial R} f \overset{\text{jako v r. (2)}}{=} \sum_{j=1}^{8} \int_{\partial R_j} f + \int_{\partial S} f \overset{\text{V. 12, } R_j \subset \mathbb{C}\setminus A}{=} \int_{\partial S} f\ . \tag{5}$$

Obdélníky R a S v obecné poloze převedeme na předešlý případ. Podle úloh 18 a 19 pro každé dva obdélníky R a S a každou neprázdnou kompaktní množinu $A \subset \mathrm{int}(R) \cap \mathrm{int}(S)$ najdeme obdélník T, že

$$A \subset \mathrm{int}(T) \ \text{ a } \ T \subset \mathrm{int}(R) \cap \mathrm{int}(S) \,.$$

Takže, podle předešlého případu,

$$\int_{\partial R} f = \int_{\partial T} f = \int_{\partial S} f \,.$$

$\square$

Úloha 18 *Dokažte, že každý neprázdný průnik dvou obdélníků je obdélník.*

Úloha 19 *Dokažte, že pro každé dva obdélníky R a S a každou neprázdnou kompaktní množinu $A \subset \mathrm{int}(R) \cap \mathrm{int}(S)$ existuje obdélník T, že*

$$A \subset \mathrm{int}(T) \ \ \textit{a} \ \ T \subset \mathrm{int}(R) \cap \mathrm{int}(S) \,.$$

DĚKUJI ZA POZORNOST!

Úlohy za dom. cv. jsou: 1, 5, 9, 16 a 19. Deadline je (do konce dne) 10. 5. 2022.