11. přednáška 16. prosince 2009

Úvod do komplexní analýzy.

Tři závěrečné přednášky předmětu Matematická analýza III (NMAI056) jsou věnovány úvodu do komplexní analýzy. Což je nadnesená formulace neboť časový rozsah nám dovoluje pouze zopakovat základní vlastnosti komplexních čísel a probrat mocninné řady. Přesnější název by byl „Mocninné řady v komplexním oboru“. Výsledky budeme uvádět většinou bez důkazů.

Aplikace komplexních čísel v kombinatorice. Začneme jednou hezkou aplikací komplexních čísel. Množinu přirozených čísel $\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ můžeme takto rozložit na tři vzájemně disjunktní množiny:

$$\{1, 2, 3, \ldots\} = A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \{2, 4, 6, \ldots\} \cup \{1, 5, 9, \ldots\} \cup \{3, 7, 11, \ldots\}.$$

Množina A_1 je tvořena sudými čísly tvaru $2n+2$, množina A_2 čísly tvaru $4n+1$ a množina A_3 čísly tvaru $4n+3$, přičemž $n = 0, 1, \ldots$. Každé přirozené číslo leží právě v jedné z množin A_i a každá je aritmetickou posloupností, má tvar $\{a + dn \mid n = 0, 1, \ldots\}$, kde $a, d \in \mathbf{N}$. Množina A_1 má diferenci $d = 2$ a množiny A_2 a A_3 mají tutéž diferenci $d = 4$. Nedal by se udělat rozklad na aritmetické posloupnosti s různými diferencemi? Pomocí komplexních čísel ukážeme, že to není možné.

Tvrzení. Nechť

$$\{1, 2, \ldots\} = \bigcup_{i=1}^{k} \{a_i + d_i n \mid n = 0, 1, \ldots\},\ a_i, d_i \in \mathbf{N},$$

je takový rozklad množiny $\mathbf{N}$, že každé přirozené číslo leží v jediné z k aritmetických posloupností a $k \geq 2$. Potom $d_i = d_j$ pro nějaké dva indexy $i \neq j$, takže se některé dvě diference rovnají.

Důkaz. Sporem: budeme předpokládat, že všech k diferencí d_i je různých, a odvodíme spor. Můžeme předpokládat, že $1 < d_1 < d_2 < \ldots < d_k$ (případ $d_1 = 1$ nemůže nastat, neměli bychom rozklad $\mathbf{N}$) a označíme si $A_i = \{a_i + d_i n \mid n = 0, 1, \ldots\}$. To, že každé číslo $n \in \mathbf{N} = \{1, 2, \ldots\}$ leží v právě jedné z množin A_i znamená, že pro každé $z \in (-1, 1)$ platí rovnost mezi hodnotami následujících funkcí daných mocninnými řadami (které jako geometrické řady zjevně konvergují na $(-1, 1)$):

$$\sum_{n \in \mathbf{N}} z^n = \sum_{n \in A_1} z^n + \sum_{n \in A_2} z^n + \cdots + \sum_{n \in A_k} z^n,$$

to jest

$$z \sum_{n=0}^{\infty} z^n = z^{a_1} \sum_{n=0}^{\infty} z^{nd_1} + z^{a_2} \sum_{n=0}^{\infty} z^{nd_2} + \cdots + z^{a_k} \sum_{n=0}^{\infty} z^{nd_k},$$

což podle vzorce pro součet geometrické řady pro každé $z \in (-1, 1)$ dává rovnost

$$\frac{z}{1-z} = \frac{z^{a_1}}{1-z^{d_1}} + \frac{z^{a_2}}{1-z^{d_2}} + \cdots + \frac{z^{a_k}}{1-z^{d_k}}.$$

Tato rovnost se snadno převede ke sporu, když pro z povolíme hodnoty v oboru komplexních čísel $\mathbf{C}$. Platí totiž, jak se snadno dokáže, i pro každé $z \in \mathbf{C}$ se $|z| < 1$. Komplexní číslo

$$\alpha = \cos(2\pi/d_k) + i \sin(2\pi/d_k)$$

je tzv. primitivní d_k-tá odmocnina z 1:

$$\alpha^d \neq 1 \text{ pro každé } d = 1, 2, \ldots, d_k - 1, \text{ ale } \alpha^{d_k} = 1.$$

Při dosazení $z = \alpha$ (jež je ovšem nepřípustné, neboť α leží mimo množinu $|z| < 1$) jsou všechny členy rovnosti kromě posledního dobře definované, ale poslední ne a to vede ke sporu. Podrobněji a přesněji, vezmeme libovolnou posloupnost komplexních čísel $z_1, z_2, \ldots$ s vlastností, že $|z_n| < 1$ pro každé n, ale $z_n \to \alpha$ pro $n \to \infty$ (což lze udělat, protože α leží na hranici otevřeného kruhu $|z| < 1$). Pak pro $n \to \infty$ máme

$$\frac{z_n}{1-z_n} \to \frac{\alpha}{1-\alpha} \quad \text{a pro } i = 1, 2, \ldots, k-1 \text{ též } \quad \frac{z_n^{a_i}}{1-z_n^{d_i}} \to \frac{\alpha^{a_i}}{1-\alpha^{d_i}},$$

ale

$$\left|\frac{z_n^{a_k}}{1-z_n^{d_k}}\right| = \frac{|z_n^{a_k}|}{|1-z_n^{d_k}|} \to \frac{1}{0^+} = +\infty,$$

protože $|z_n^{a_k}| \to |\alpha^{a_k}| = 1$, avšak $|1 - z_n^{d_k}| \to |1 - \alpha^{d_k}| = 0$, čili $|1 - z_n^{d_k}| \to 0^+$. Rovnost přepíšeme jako

$$\frac{z^{a_k}}{1-z^{d_k}} = \frac{z}{1-z} - \frac{z^{a_1}}{1-z^{d_1}} - \frac{z^{a_2}}{1-z^{d_2}} - \cdots - \frac{z^{a_{k-1}}}{1-z^{d_{k-1}}},$$

položíme $z = z_n$, použijeme absolutní hodnotu (zvanou v komplexním oboru modul) a trojúhelníkovou nerovnost. Pro každé $n = 1, 2, \ldots$ tím dostaneme nerovnost

$$\left|\frac{z_n^{a_k}}{1-z_n^{d_k}}\right| \leq \left|\frac{z_n}{1-z_n}\right| + \sum_{i=1}^{k-1} \left|\frac{z_n^{a_i}}{1-z_n^{d_i}}\right|.$$

Na druhou stranu ale víme, že pro $n \to \infty$ její levá strana jde do $+\infty$ a pravá ke konečné hodnotě $|\alpha/(1-\alpha)| + \sum_{i=1}^{k-1} |\alpha^{a_i}/(1-\alpha^{d_i})|$. Pro všechna dostatečně velká n tak tato nerovnost neplatí, což je spor. $\square$

Sestrojení komplexních čísel z reálných čísel. Jedna možná konstrukce je tato. Jako množinu komplexních čísel vezmeme množinu dvojic reálných čísel

$$\mathbf{C} = \mathbf{R} \times \mathbf{R} = \{(a, b) \mid a \in \mathbf{R}, b \in \mathbf{R}\}$$

a definujeme na ní aritmetické operace sčítání a násobení

$$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d),\ \ (a,b)\cdot(c,d)=(a,b)(c,d)=(ac-bd,ad+bc).$$

Není těžké dokázat, že to jsou asociativní a komutativní operace a že násobení je distributivní vzhledem ke sčítání. Dvojice $(0,0)$ a $(1,0)$ jsou pro $+$ a $\cdot$ neutrální prvky. Inverzní prvek k (a,b) je při sčítání $(-a,-b)$ a při násobení (s výjimkou $(0,0)$, jež inverz nemá) $(a/(a^2+b^2),-b/(a^2+b^2))$. Struktura $\mathbf{C}=(\mathbf{C},+,\cdot)$ je tedy komutativní těleso, stejně jako $\mathbf{R}=(\mathbf{R},+,\cdot)$, z něhož jsme vyšli. Na rozdíl od $\mathbf{R}$ ale $\mathbf{C}$ nemá přirozeně definované uspořádání a není uspořádané těleso. Zobrazení

$$f:\ \mathbf{R}\to\mathbf{C},\ a\mapsto(a,0)$$

je prosté a respektuje sčítání a násobení: $f(a+b)=f(a)+f(b)$, $f(ab)=f(a)f(b)$ pro každé $a,b\in\mathbf{R}$ a i $f(1)=(1,0)$. Jeho obraz $\{(a,0)\mid a\in\mathbf{R}\}$ je tedy kopií $\mathbf{R}$ v $\mathbf{C}$ a $\mathbf{R}$ bereme jako podmnožinu $\mathbf{C}$, když to přesně formálně tak není. Místo $(a,0)$ píšeme stručněji a.

Dvojici $(0,1)$ označíme jako i a říkáme jí *imaginární jednotka*. Máme $(0,1)^2=(0,1)\cdot(0,1)=(-1,0)=-1$, takže v tělese $\mathbf{C}$ má na rozdíl od $\mathbf{R}$ číslo -1 druhou odmocninu. Každé komplexní číslo $z=(a,b)\in\mathbf{C}$, tedy $a,b\in\mathbf{R}$, se dá jednoznačně vyjádřit jako lineární kombinace reálné a imaginární jednotky $(1,0)$ a $(0,1)$ s reálnými koeficienty:

$$z=(a,b)=(a,0)(1,0)+(b,0)(0,1)=a\cdot 1+b\cdot i=a+bi.$$

To je obvyklý zápis komplexního čísla pomocí *reálné části* a a *imaginární části* b, který odteď budeme používat. Označují se jako $\mathrm{Re}(z)=a$ a $\mathrm{Im}(z)=b$.

Ukažme, že každé nenulové komplexní číslo má právě dvě druhé odmocniny a nula jednu. Pro dané $z=a+bi$ řešíme v $\mathbf{C}$ rovnici $u^2=z$, $u=x+yi$:

$$\begin{aligned}(x+yi)^2 &= a+bi\\ x^2+2xyi-y^2 &= a+bi\\ x^2-y^2=a \quad &\& \quad 2xy=b.\end{aligned}$$

Pro $a=b=0$ má tato soustava jediné řešení $x=y=0$. Nechť $a\neq 0$ nebo $b\neq 0$. Eliminací y vyjádřením $y=b/2x$ a dosazením dostáváme rovnici

$$4x^4-4ax^2-b^2=0.$$

Odtud

$$x=\pm\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}\ \text{ a }\ y=\frac{b}{2x}=\pm\sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}\cdot\mathrm{sgn}(b).$$

Doplněním na čtverec se lehce ukáže, že každá kvadratická rovnice $az^2+bz+c=0$ s komplexními koeficienty $a,b,c\in\mathbf{C}$ má v $\mathbf{C}$ řešení. Na čtvrté přednášce jsme si dokonce dokázali Základní větu algebry, že každá polynomiální rovnice

$$a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1z+a_0=0,\ a_i\in\mathbf{C},n\geq 1,a_n\neq 0$$

má v komplexních číslech řešení $z \in \mathbf{C}$.

Proč $\mathbf{C}$ není uspořádané těleso? V uspořádaném tělese platí trichotomie (pro každé dva jeho prvky α, β platí právě jedno z $\alpha < \beta$, $\alpha = \beta$ a $\alpha > \beta$), násobení kladným prvkem zachovává nerovnosti a násobení záporným prvkem je obrací (pro každé $\alpha > 0$ z $\beta < \gamma$ plyne $\alpha\beta < \alpha\gamma$ a pro každé $\alpha < 0$ z $\beta < \gamma$ plyne $\alpha\beta > \alpha\gamma$). Kdyby na $\mathbf{C}$ šlo zavést uspořádání, aby bylo uspořádané těleso, obě možnosti $i > 0$ a $i < 0$ (zjevně $i \neq 0$) vedou ke sporu $-1 > 0$: pokud $i > 0$, vynásobením i máme, že $-1 = i \cdot i > 0 \cdot i = 0$, a pokud $i < 0$, vynásobením i máme zase $-1 = i \cdot i > 0 \cdot i = 0$.

Komplexní rovina. Zopakujeme geometrické pojetí komplexních čísel. Na $\mathbf{C} = \mathbf{R}^2$ se díváme jako na euklidovskou rovinu a komplexní číslo $z = a + bi$ zobrazujeme v kartézských souřadnicích jako bod s x-ovou souřadnicí a a y-ovou souřadnicí b. Vzdálenost dvou komplexních čísel $z = a + bi$ a $w = c + di$ pak je euklidovská vzdálenost dvou odpovídajících bodů,

$$d(z, w) = \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2}.$$

Vzdálenosti čísla/bodu $z = a + bi$ od počátku $0 = 0 + 0i$ se říká *modul* čísla z a značí se $|z|$: $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Modul čísla z můžeme napsat pomocí čísla $\overline{z} = a - bi$, jež se nazývá *číslo komplexně sdružené se* z, jako

$$|z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}}.$$

Zřejmě

$$d(z, w) = |z - w|.$$

Pro d máme trojúhelníkovou nerovnost, kterou pomocí modulu zapíšeme jako

$$|z + w| \leq |z| + |w|.$$

Připomeneme geometrický výklad aritmetických operací s komplexními čísly. Čísla $z_1 = a_1 + b_1 i$ a $z_2 = a_2 + b_2 i$ se sečtou jako vektory: šipku vektoru z_2 posuneme tak, že její počáteční vrchol leží v bodu z_1, pak její koncový bod udává součet $z_1 + z_2$. Zajímavější je násobení. Abychom vynásobili z_1 a z_2, uvážíme trojúhelník U s vrcholy 0, 1 a z_1. Pak vezmeme jednoznačně určený podobný trojúhelník T, jehož strana $0z_2$ odpovídá straně 01 trojúhelníka U. Třetí vrchol trojúhelníka T je součin $z_1 z_2$.

Polární souřadnice. Komplexní čísla jako body v komplexní rovině vedle kartézských souřadnic popisujeme i polárními souřadnicemi. Každé nenulové komplexní číslo z má kromě modulu také *argument*, což je úhel φ svíraný úsečkami $0z$ a 01. Označujeme ho $\arg(z) = \varphi$ a $\varphi \in [0, 2\pi)$. Nula nemá argument definovaný. Je užitečné povolit $\varphi \in \mathbf{R}$, potom je φ určen jednoznačně až na celočíselný násobek čísla 2π. Číslo $z \in \mathbf{C}$ tak jednoznačně určíme uvedením jeho reálné a imaginární části ve dvojici $(a, b) = (\mathrm{Re}(z), \mathrm{Im}(z))$ (kartézské souřadnice) nebo, když $z \neq 0$, uvedením jeho modulu a argumentu ve dvojici $(r, \varphi) = (|z|, \arg(z))$

(polární souřadnice). Připomeneme, jak se mezi oběma druhy souřadnic přechází. Číslo $z = a + bi$ s kartézskými souřadnicemi (a, b) má polární souřadnice (r, φ) dané vztahy
$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$
a $\varphi \in \mathbf{R}$ je takové číslo, že
$$\sin(\varphi) = \frac{\mathrm{Im}(z)}{|z|} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \text{a} \quad \cos(\varphi) = \frac{\mathrm{Re}(z)}{|z|} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$
Argument φ je tímto určen jednoznačně až na násobek 2π. Číslo $z \in \mathbf{C}$, $z \neq 0$, s polárním souřadnicemi $(r, \varphi) = (|z|, \arg(z)$ má kartézské souřadnice
$$a = \mathrm{Re}(z) = r\cos(\varphi) \quad \text{a} \quad b = \mathrm{Im}(z) = r\sin(\varphi),$$
takže
$$z = a + bi = r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)).$$
Tomuto vyjádření z se říká *goniometrický tvar* komplexního čísla. Definujme si zkratku
$$\mathrm{cis}(\varphi) := \cos(\varphi) + i\sin(\varphi).$$
Ze součtových vzorců pro goniometrické funkce plynou vztahy pro násobení, dělení a umocňování pomocí goniometrického tvaru: nechť $z = r\mathrm{cis}(\varphi)$, $z_1 = r_1\mathrm{cis}(\varphi_1)$, $z_2 = r_2\mathrm{cis}(\varphi_2)$ a $n \in \mathbf{Z}$, pak
$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2\, \mathrm{cis}(\varphi_1)\mathrm{cis}(\varphi_2) = r_1 r_2\, \mathrm{cis}(\varphi_1 + \varphi_2) \\ z_1/z_2 &= (r_1/r_2)\mathrm{cis}(\varphi_1 - \varphi_2) \\ z^n &= r^n \mathrm{cis}(n\varphi). \end{aligned}$$

Pro ilustraci pomocí goniometrického tvaru nalezneme všechny třetí odmocniny z jedné, což jsou řešení $z \in \mathbf{C}$ rovnice $z^3 = 1$. Jistě $z \neq 0$, píšeme $z = r\ \mathrm{cis}(\varphi)$. Číslo 1 má polární souřadnice $1 = 1\mathrm{cis}(0)$. Z rovnice $z^3 = 1$, čili
$$r^3\mathrm{cis}(3\varphi) = 1\mathrm{cis}(0),$$
dostáváme $r^3 = 1$ a $3\varphi = 0$ modulo 2π. Tedy $r = 1$ a φ nabývá (modulo 2π) tří hodnot $\varphi_1 = \frac{0}{3} = 0$, $\varphi_2 = \frac{2\pi}{3}$ and $\varphi_3 = \frac{4\pi}{3}$. Tím dostáváme hodnoty všech tří třetích odmocnin z 1,
$$z_1 = \mathrm{cis}(0) = 1,\ z_2 = \mathrm{cis}(2\pi/3) = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{3},\ z_3 = \mathrm{cis}(4\pi/3) = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{3}.$$
Čísla z_1, z_2 a z_3 leží na jednotkové kružnici a tvoří vrcholy rovnostranného trojúhelníku. Obecně jsou n-té odmocniny z 1 vrcholy pravidelného n-úhelníka vepsaného jednotkové kružnici v komplexní rovině, s vrcholem v čísle 1.