Příklady probírané na 5. cvičení 4. 11. 2009

1. (Kompaktní množiny v diskrétní matematice) Připomeňme si, že síť je orientovaný graf $D = (V, E)$ (V je množina vrcholů a $E \subset V \times V$ množina hran) spolu s kapacitami hran $c : E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ a dvěma různými vrcholy zdrojem a stokem $z, s \in V$ a že tok v této síti je zobrazení $f : E \to \mathbb{R}$ splňující:

- (nepřekračování kapacit) pro každou hranu $e \in E$ je $0 \leq f(e) \leq c(e)$ a
- (co do průtočného vrcholu vteče z něj musí odtéci) pro každý vrchol $v \in V \backslash \{z, s\}$ je
$$\sum_{uv \in E} f(uv) = \sum_{vw \in E} f(vw).$$

Velikost toku $|f|$ je

$$|f| = \sum_{zw \in E} f(zw) - \sum_{uz \in E} f(uz)$$

(co celkem odteče ze zdroje), což, jak se snadno dokáže, je totéž jako

$$|f| = \sum_{us \in E} f(us) - \sum_{sw \in E} f(sw)$$

(co celkem vteče do stoku). Pomocí kompaktních množin ukažte, že existuje maximální tok, tj. že existuje maximum

$$\max_{f \text{ je tok}} |f|.$$

Souvislé metrické prostory. Metrický prostor (M, d) je *souvislý*, když neobsahuje netriviální obojetnou podmnožinu (tj. podmnožinu $X \subset M$, která je otevřená i uzavřená a $X \neq \emptyset, M$). V opačném případě je tento prostor *nesouvislý*. Jinak řečeno, (M, d) je nesouvislý, když se M dá rozložit na dvě neprázdné otevřené (či uzavřené) množiny: $M = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$, $A, B \neq \emptyset$ a A, B jsou obě otevřené (či obě uzavřené). Podmnožina $X \subset M$ je souvislá, je-li podprostor (X, d) s indukovanou metrikou souvislý. Řekneme, že podmnožina $X \subset M$ je *obloukově souvislá*, když pro každé dva její body $a, b \in X$ existuje takové spojité zobrazení

$$f : [0, 1] \to X,$$

že $f(0) = a$ a $f(1) = b$ (každé dva vrcholy X lze tedy v rámci X spojit „cestou“). Nepožadujeme, aby f bylo prosté (je to tedy spíše „sled“, ta křivka může sama sebe protínat).

V následujících úlohách jsou (M, d), (M_1, d_1), (M_2, d_2) obecné metrické prostory a $\mathbb{R}^n$ je euklidovský metrický prostor.

1. Ukažte, že $X \subset M$ je nesouvislá, právě když existují otevřené (či uzavřené) podmnožiny $A, B \subset M$, že $X \subset A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$, $A \cap X \neq \emptyset$ a $B \cap X \neq \emptyset$—X lze netriviálně pokrýt dvěma disjunktními otevřenými (uzavřenými) množinami.

2. (nejdůležitější vlastnost souvislosti) Dokažte, že když je
$$f : M_1 \to M_2$$
spojité zobrazení a $X \subset M_1$ je souvislá množina, potom i její obraz $f(X) \subset M_2$ je souvislá množina.

3. Dokažte, že $X \subset \mathbb{R}$ je souvislá, právě když X je interval (to jest pro každá tři reálná čísla $a < b < c$ platí, že $a, c \in X \Rightarrow b \in X$).

4. (oblouková souvislost je silnější) Dokažte, že když je $X \subset M$ obloukově souvislá, potom je souvislá.

5. (příklad souvislé množiny, jež není obloukově souvislá) Dokažte, že množina $X \subset \mathbb{R}^2$,
$$X = \{(x, \sin(1/x)) \mid 0 < x \leq 1\} \cup \{(0, y) \mid -1 \leq y \leq 1\},$$
je souvislá, ale ne obloukově souvislá.

6. (souvislé otevřené množiny v euklidovském prostoru jsou obloukově souvislé) Dokažte, že je-li $X \subset \mathbb{R}^n$ otevřená a souvislá, potom je X obloukově souvislá. (Návod: uvažte na X relaci $a \sim b$, právě když se a a b dají v X spojit křivkou, a ukažte, že to je relace ekvivalence, jejíž třídy ekvivalence jsou otevřené množiny.)