Příklady na posloupnosti a řady funkcí 2

Připomeňte si z přednášky následující. Kdy lze řadu (či posloupnost) funkcí limitit v bodě, integrovat a derivovat člen po členu? Jak se nalezne poloměr konvergence mocninné řady? Co je to interval konvergence mocninné řady (i v případě mocninné řady s obecným středem)?

Nechť $f_n : M \to \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \ldots$, je posloupnost funkcí a $A, B \subset M$ jsou podmnožiny definičního oboru.

1. Dokažte, že když je A konečná a $f_n \to$ na A, potom i $f_n \rightrightarrows$ na A.
2. Dokažte, že když $f_n \rightrightarrows$ na A a $f_n \rightrightarrows$ na B, potom i $f_n \rightrightarrows$ na $A \cup B$.
3. Nechť $f_n \to$ na M, ale $f_n \not\rightrightarrows$ na M. Existuje ve smyslu inkluze největší podmnožina $A \subset M$, že $f_n \rightrightarrows$ na A?

Vyšetřete bodovou, stejnoměrnou a lokálně stejnoměrnou konvergenci následujících řad funkcí.

1. $\sum_{n\geq 1} x^n$
2. $\sum_{n\geq 1} x^{n-2}/n$
3. $\sum_{n\geq 1} 1/n^x$

Spočtěte následující limity.

1. $\lim_{x\to 1^-} \sum_{n\geq 1}(x^n - x^{n+1})$
2. $\lim_{x\to 1^-} \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n} \frac{x^n}{x^n+1}$
3. $\lim_{x\to 0^+} \sum_{n\geq 1} \frac{1}{2^n n^x}$

Platí rovnost $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\ dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\ dx$ pro následující posloupnosti funkcí?

1. $f_n(x) = nxe^{-nx^2}$
2. $f_n(x) = nx(1-x)^n$

3. $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^3x^2}$

Dokažte, že funkce $\zeta(x) = \sum_{n\geq 1} 1/n^x$ má na $(1, +\infty)$ derivace všech řádů.

Nalezněte poloměr konvergence následujících mocninných řad. Jak to je s konvergencí v krajních bodech intervalu konvergence?

1. $\sum_{n\geq 1} x^n/n$
2. $\sum_{n\geq 0} 4^n x^{2n}$
3. $\sum_{n\geq 1} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n}}{n2^n}$