

30.9.09

1. Cvičení z MA III. ~~30.9.09~~

Co je to metrický prostor? Jaké má vlastnosti metrika? K čemu metricky? Limita v abstraktních prostorech.

1. Ukažte, že následující předpisy definují metricky:

(a) R : $\rho(x, y) = |x - y|$

(b) $R^n, n \in N$: (manhattanská) $\rho_1(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$

(c) $R^n, n \in N$: (eukleidovská) $\rho_2(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2}$

(Tip: Cauchyho nerovnost: $(\sum_{i=1}^n a_i b_i)^2 \leq (\sum_{i=1}^n a_i^2)(\sum_{i=1}^n b_i^2)$)

Zobecnění: $\rho_p(x, y) = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^p}$ ($p \geq 1$), $p \in R$

(d) $R^n, n \in N$: $\rho_\infty(x, y) = \max\{|x_i - y_i|; 1 \leq i \leq n\}$ ($p \rightarrow \infty$)

méně názorná metrika:

(e) $P \neq 0$: $\rho(x, y) = 1$, pokud $x \neq y$, $\rho(x, y) = 0$, pokud $x = y$.

2. Další vlastnosti prostoru R^n s metrikami (b), (c) a (d) z cvičení 1.:

(a) Konvergence v R^n (po složkách) – ukažte např. pro eukleidovskou metricku!

(b) Ukažte ekvivalenci metrik (b), (c) a (d) z cvičení 1.
(postač. podm. pro ekviv. ρ_i, ρ_j : $\exists r, s: 0 < r \leq s$ takové, že pro $\forall x, y$ platí:
 $r \cdot \rho_i(x, y) \leq \rho_j(x, y) \leq s \cdot \rho_i(x, y)$)

(c) Jak vypadá jednotková koule v R^n s metrikami (b), (c) a (d) z cvičení 1.?

Jak se definuje otevřená, uzavřená množina? Co jsou limitní a izolované body? Co je hranice, uzávěr, vnitřek množiny?

3. Zkoumejte následující množiny v R^n (otevřenost, uzavřenost, vnitřek, hranice, uzávěr):

(a) Ukažte, že koule $B(a, r) = \{x \in R^n; \rho(a, x) < r\}$ je otevřená množina.
Ukažte, že každá konečná množina v R^n je uzavřená.

(b) $\{[x, y] \in R^2; y > x^2, x^2 + y^2 < 2\}$

(c) $\{[x, y] \in R^2; y \geq x^2\} \cup \{[0, -1]\}$

(d) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 1 \leq x < 2, 1 \leq y < 2\}$

(e) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; |\frac{y-1}{x}| \leq 1\}$

(f) $\{[\frac{1}{n}, \frac{1}{m}] \in \mathbb{R}^2; n, m \in \mathbb{R}\}$

(g) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \frac{4-4x^2-y^2}{4y} \geq 0\}$

(h) $\{[3 \cos t + \cos 3t, 3 \sin t - \sin 3t] \in \mathbb{R}^2; t \in [0, 2\pi]\}$

4. Zkoumejte následující množinu M – je tato množina otevřená či uzavřená?

(a) $\forall k : M_k = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 < (1 + \frac{1}{k})^2\}$

Určete množinu $M = \bigcap_{k=1}^{\infty} M_k$. Je tato množina otevřená či uzavřená?

(b) $\forall k : M_k = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq (1 - \frac{1}{k})^2\}$

Určete množinu $M = \bigcup_{k=1}^{\infty} M_k$. Je tato množina otevřená či uzavřená?