MA2 – přednáška 6

Martin Klazar

5. listopadu, 2026

Abstrakt

Zobecníme dvě věty týkající se vztahů mezi limitami a lineárním uspořádáním $\langle \mathbb{R}^*, < \rangle$ na reálné funkce definované na metrických prostorech. Připomeneme Heineho definici spojitosti a jako důsledek získáme aritmetiku bodové spojitosti (včetně operace skládání). Zobecníme konstrukci elementárních funkcí jedné proměnné na funkce typu $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Dokážeme, že každá elementární funkce je spojitá, a zopakujeme nebo odvodíme další vlastnosti spojitých zobrazení mezi metrickými prostory.

I v této přednášce zobecníme několik dalších výsledků týkajících se limit a spojitosti reálných funkcí jedné proměnné na zobrazení mezi metrickými prostory.

Limity a uspořádání

V minulé přednášce jsme napsali, že věta o limitách složených zobrazení byla posledním zobecněním výsledků o limitách. Zapomněli jsme však na výsledky o vztahu mezi limitami a lineárním uspořádáním $\langle \mathbb{R}^*, < \rangle$. Ty teď zobecníme.

Pro dvě množiny reálných čísel $A, B \subset \mathbb{R}$ píšeme $A < B$, jestliže $a < b$ pro každé $a \in A$ a každé $b \in B$. Připomeňme, že $B_{\mathbb{R}}(+\infty, \varepsilon) = (\varepsilon^{-1}, +\infty)$ a $B_{\mathbb{R}}(-\infty, \varepsilon) = (-\infty, -\varepsilon^{-1})$. Pro $a \in \mathbb{R}$ samozřejmě $B_{\mathbb{R}}(a, \varepsilon) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$.

Úloha 1 *Nechť $A, B \in \mathbb{R}^*$ jsou reálná čísla nebo nekonečna taková, že $A < B$. Ukažte, že pro nějaké $\varepsilon > 0$ je*

$$B_{\mathbb{R}}(A,\, \varepsilon) < B_{\mathbb{R}}(B,\, \varepsilon)\,.$$

Připomeňme, že $\neg$ značí logickou spojku negace. V další úloze připomeneme užitečnou tautologii.

Úloha 2 *Nechť φ a ψ jsou výroky. Ukažte, že (složený) výrok*

$$(\varphi \Rightarrow \psi) \iff (\neg\psi \Rightarrow \neg\varphi)$$

je tautologie, tj. platí bez ohledu na to, jaké jsou pravdivostní hodnoty výroků φ a ψ (čtyři možnosti).

Věta 3 (limity versus uspořádání)[1] *Nechť $M = \langle M, d\rangle$ a $N = \langle N, e\rangle$ jsou metrické prostory, $X \subset M$, $Y \subset N$, $f\colon X \to \mathbb{R}$, $g\colon Y \to \mathbb{R}$, bod $b \in M$ je hromadný bod množiny X a bod $c \in N$ je hromadný bod množiny Y. Předpokládejme, že $\lim_{x\to b} f(x) = C$ a $\lim_{x\to c} g(x) = D$, kde $C, D \in \mathbb{R}^*$. Pak platí následující.*

1. *Jestliže $C < D$, pak existuje $\delta > 0$ tak, že $f[C_M(b,\delta)] < g[C_N(c,\delta)]$.*
2. *Jestliže pro každé $\delta > 0$ existují takové body $x \in C_M(b,\delta) \cap X$ a $y \in C_N(c,\delta) \cap Y$, že $f(x) \geq g(y)$, pak $C \geq D$.*

Důkaz. 1. Nechť $C < D$. Podle úlohy 1 existuje takové $\varepsilon > 0$, že $B_{\mathbb{R}}(C,\varepsilon) < B_{\mathbb{R}}(D,\varepsilon)$. Z předpokladu o limitách pak plyne, že existuje takové $\delta > 0$, že

$$f[C_M(b,\,\delta)] \subset B_{\mathbb{R}}(C,\,\varepsilon) \text{ a } g[C_N(c,\,\delta)] \subset B_{\mathbb{R}}(D,\,\varepsilon)\,.$$

Odtud plyne první tvrzení věty.

2. S ohledem na úlohu 2 a předchozí důkaz části 1 jsme hotovi. Zapíšeme-li část 1 jako implikaci $\varphi \Rightarrow \psi$, pak má část 2 přesně tvar $\neg\psi \Rightarrow \neg\varphi$. □

Podle části 2 limity zachovávají neostré nerovnosti. Ostré nerovnosti se zachovávat nemusí. Jsou-li $f, g\colon (0,1) \to \mathbb{R}$ dány předpisy $f(x) = x$ a $g(x) = 0$, pak $f(x) > g(y)$ pro všechna $x, y \in (0,1)$, ale $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{y\to 0} g(y) = 0$.

Úloha 4 *Dokažte část 1 věty s následujícím silnějším závěrem: ... existují $\delta > 0$ a $a, b \in \mathbb{R}$ tak, že*

$$f[C_M(b,\delta)] < \{a\} < \{b\} < g[C_N(c,\delta)]\,.$$

[1] Autorem této věty je autor těchto skript.

Zobecníme známou větu o dvou policajtech.

Věta 5 (2 policajti) *Nechť $M = \langle M, d\rangle$ a $N = \langle N, e\rangle$ jsou metrické prostory, $X \subset M$, nechť $f, g\colon X \to N$ jsou dvě zobrazení, bod $b \in M$ je hromadný bod množiny X a nechť $\lim_{x\to b} f(x) = c$ $(\in N)$. Potom*

$$\lim_{x\to b} e(f(x),\, g(x)) = 0 \Rightarrow \lim_{x\to b} g(x) = c\,.$$

Důkaz. Nechť je dáno $\varepsilon > 0$ a nechť platí $\lim_{x\to b} e(f(x), g(x)) = 0$. Tedy existuje $\delta > 0$, že $e(f(x), g(x)) < \varepsilon/2$ a $e(f(x), c) < \varepsilon/2$ pro každý bod $x \in C_M(b, \delta) \cap X$. Platí totiž i $\lim_{x\to b} f(x) = c$. Z trojúhelníkové nerovnosti pak pro tytéž body x plyne,

$$e(g(x),\, c) \le e(g(x),\, f(x)) + e(f(x),\, c) \le \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon\,.$$

Vidíme, že $\lim_{x\to b} g(x) = c$. □

Úloha 6 *V jakém metrickém prostoru se bere limita v předpokladu této implikace?*

Klasická věta o dvou policajtech je jednoduchým důsledkem této věty.

Důsledek 7 (klasičtí 2 policajti) *Nechť $M = \langle M, d\rangle$ je metrický prostor, $X \subset M$, nechť $f, g, h\colon X \to \mathbb{R}$ jsou tři zobrazení, bod $b \in M$ je hromadný bod množiny X a nechť $\lim_{x\to b} f(x) = \lim_{x\to b} h(x) = c$ $(\in \mathbb{R})$. Potom*

$$\big(\exists\, \delta > 0\, \forall a \in C(b,\, \delta) \cap X\colon\ f(a) \le g(a) \le h(a)\big) \Rightarrow \lim_{x\to b} g(x) = c\,.$$

Důkaz. Ukážeme, že $\lim_{x\to b} |f(x) - g(x)| = 0$. Předchozí věta, použitá s $N = E_1$, pak dává, že $\lim_{x\to b} g(x) = c$.

Předpokládejme, že je dáno $\varepsilon > 0$ a že platí předpoklad implikace. Zvolíme $\delta > 0$ tak, aby platil předpoklad implikace a aby $|f(x) - c|, |h(x) - c| < \varepsilon/2$ pro každé $x \in C_M(b, \delta) \cap X$. Potom pro tytéž body x máme díky TI

$$0 \le h(x) - f(x) \le |h(x) - c| + |c - g(x)| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon\,.$$

Tedy pro každé takový bod x má reálný interval $I_x := [f(x), h(x)]$ délku menší než ε a pro každé x platí $g(x) \in I_x$. Podle úlohy 8 dostáváme $|g(x) - f(x)| < \varepsilon$ pro každé $x \in C_M(b, \delta) \cap X$. Vidíme tedy, že $\lim_{x\to b} |f(x) - g(x)| = 0$. □

Úloha 8 *Jestliže $c \in [a,b]$, kde $a \leq b$ a c jsou reálná čísla, pak vzdálenosti $|c-a|, |c-b| \leq b-a$.*

Vlastnosti spojitých zobrazení

Připomeňme si Heineovu formulaci spojitosti zobrazení v bodě, kterou jsme dokázali ve Větě 27 v přednášce 1.

Tvrzení 9 (Heineova spojitost) *Nechť $M = \langle M, d\rangle$ a $N = \langle N, e\rangle$ jsou metrické prostory a $f\colon M \to N$. Potom je zobrazení f spojité v bodě $b \in M$ právě tehdy, když pro každou posloupnost $(a_n) \subset M$ s $\lim a_n = b$ platí také $\lim f(a_n) = f(b)$.*

Ukážeme, že spojitost v bodě se zachovává při aritmetických operacích, při lineárních kombinacích a při skládání zobrazení. Připomeňme, že jsou-li $f, g\colon A \to \mathbb{R}$ funkce, pak součtová funkce $f+g$ a součinová funkce fg mají stejný definiční obor A a hodnoty $(f+g)(a) := f(a)+g(a)$ a $(fg)(a) := f(a)g(a)$. Podílová funkce f/g má definiční obor $A \setminus \{a \in A\colon\ g(a) = 0\}$ a hodnoty $(f/g)(a) := f(a)/g(a)$.

Tvrzení 10 *Nechť $M = \langle M, d\rangle$ je metrický prostor, $b \in M$ je bod a nechť $f, g\colon M \to \mathbb{R}$ jsou zobrazení. Nechť jsou f a g spojitá v bodě b. Pak jsou v bodě b spojitá i $f+g$ a fg. Jestliže navíc $g(b) \neq 0$, pak je v bodě b spojité i podílové zobrazení f/g.*

Důkaz. Dokážeme poslední tvrzení o spojitosti f/g a případy $f+g$ a fg ponecháme jako cvičení. Podle Tvrzení 9 stačí dokázat, že pokud $(a_n) \subset M$ je libovolná posloupnost s $g(a_n) \neq 0$ pro každé n a $\lim a_n = b$, pak $\lim(f/g)(a_n) = (f/g)(b)$. Nechť tedy (a_n) je taková posloupnost. Protože f i g jsou v bodě b spojité, z Tvrzení 9 plyne $\lim f(a_n) = f(b)$ a $\lim g(a_n) = g(b)$. Jelikož $g(b) \neq 0$, výraz $f(b)/g(b)$ není neurčitý a podle části 3 Věty 15 v přednášce 5 platí

$$\lim(f/g)(a_n) = \lim f(a_n)/g(a_n) = f(b)/g(b) = (f/g)(b)\,.$$

□

Úloha 11 *Dokažte stejnou metodou, že $f+g$ a fg jsou spojité v bodě b.*

Jsou-li $f, g\colon A \to \mathbb{R}^m$ a $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, pak lineární kombinace

$$\alpha f + \beta g\colon A \to \mathbb{R}^m$$

má hodnoty $(\alpha f + \beta g)(a) := \alpha f(a) + \beta g(a)$.

Úloha 12 *Nechť $m \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\overline{c}, \overline{d} \in \mathbb{R}^m$ a nechť $(\overline{a}_n), (\overline{b}_n) \subset \mathbb{R}^m$ jsou takové dvě posloupnosti, že $\lim \overline{a}_n = \overline{c}$ a $\lim \overline{b}_n = \overline{d}$. Dokažte, že potom*

$$\lim(\alpha \overline{a}_n) = \alpha \overline{c} \;\; a \;\; \lim(\overline{a}_n + \overline{b}_n) = \overline{c} + \overline{d}\,.$$

Odvoďte z toho následující tvrzení.

Tvrzení 13 *Nechť $m \in \mathbb{N}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, nechť $M = \langle M, d\rangle$ je metrický prostor, $b \in M$ je bod a nechť $f, g\colon M \to \mathbb{R}^m$ jsou zobrazení. Jsou-li f a g spojité v bodě b, pak je v bodě b spojité i zobrazení $\alpha f + \beta g$.*

Připomeňme, že jsou-li $g\colon A \to B$ a $f\colon A' \to B'$ dvě zobrazení, pak složené zobrazení $f(g)\colon D(f(g)) \to B'$ má definiční obor

$$D(f(g)) = \{a \in A\colon \; g(a) \in A'\} \;\; (\subset A)$$

a hodnoty $(f(g))(a) := f(g(a))$.

Tvrzení 14 *Nechť $M = \langle M, d\rangle$, $N = \langle N, e\rangle$ a $P = \langle P, h\rangle$ jsou tři metrické prostory, $b \in M$ je bod a nechť $g\colon M \to N$ a $f\colon N \to P$ jsou dvě zobrazení. Je-li g spojité v bodě b a f v bodě $g(b)$, pak je složené zobrazení $f(g)$ spojité v bodě b.*

Důkaz. Nechť $(a_n) \subset D(f(g))$ $(\subset M)$ je libovolná posloupnost s $\lim a_n = b$. Protože g je v bodě b spojité, z Tvrzení 9 (aplikovaného na funkci g a posloupnost (a_n) s $\lim a_n = b$) dostáváme $\lim g(a_n) = g(b)$. Protože f je spojité v bodě $g(b)$, z Tvrzení 9 (aplikovaného na funkci f a posloupnost $(g(a_n))$ s $\lim g(a_n) = g(b)$) plyne

$$\lim f(g)(a_n) = \lim f(g(a_n)) = f(g(b)) = f(g)(b)\,.$$

Závěr dostaneme opět z Tvrzení 9 (aplikovaného na funkci $f(g)$ a posloupnost (a_n) s $\lim a_n = b$): složená funkce $f(g)$ je spojitá v bodě b. □

Elementární funkce více proměnných

Některé kurzy matematické analýzy probírají tzv. *elementární funkce*. Jsou to funkce $f\colon X \to \mathbb{R}$ s $X \subset \mathbb{R}$, které lze získat opakovaným sčítáním, násobením, dělením a skládáním, přičemž se vychází z určitých *základních funkcí*. Tuto konstrukci zobecníme na reálné funkce více proměnných.

Definice 15 (základní funkce) *Následující reálné funkce jedné proměnné se nazývají základní funkce.*

1. $\mathrm{e}^x = \exp x\colon \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ *a* $\log x\colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}$.
2. $\sin x\colon \mathbb{R} \to [-1, 1]$ *a* $\arcsin x\colon [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
3. *Konstantní funkce* $k_c(x)\colon \mathbb{R} \to \{c\}$ *pro libovolné* $c \in \mathbb{R}$.
4. *Reálná mocninná funkce* $x^b\colon [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ *pro libovolné reálné* $b > 0$.

Připomeňme definice těchto funkcí. *Exponenciála* je definována součty absolutně konvergentních mocninných řad: $\mathrm{e}^x := \sum_{n\geq 0} x^n/n!$ pro každé $x \in \mathbb{R}$. *Logaritmus* je její inverzní funkce: $\log x := (\exp x)^{\langle -1\rangle}$. Podobně *sinus* je dán součty $\sin x := \sum_{n\geq 0}(-1)^n x^{2n+1}/(2n+1)!$ pro každé reálné x a *arkus sinus* (inverzní sinus) je inverzní funkce ke zúženému sinu: $\arcsin x := (\sin x \,|\, [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}])^{\langle -1\rangle}$. Přítomnost *reálné mocninné funkce* x^b pro $b > 0$ může překvapit: neplatí snad, že

$$x^b = \exp(b \log x) = \exp(k_b(x) \cdot \log x)\,?$$

Ne zcela, protože $\exp(b \log x)$ má definiční obor $(0, +\infty)$, ale pro x^b chceme definiční obor $[0, +\infty)$. Například odmocnina $\sqrt{x} = x^{1/2}$ má definiční obor $[0, +\infty)$, že? Proto pro libovolná reálná čísla $b > 0$ a $x > 0$ definujeme $x^b := \exp(b \log x)$ a položíme $0^b := 0$. U všech čtyř množin funkcí 1–4 uvádíme jejich minimální obory hodnot, tj. obrazy funkcí.

Jak získat funkce $f\colon X \to \mathbb{R}$ s $X \subset \mathbb{R}^n$ z výše uvedených základních funkcí jedné proměnné? Použijeme další základní funkce, totiž *projekce*.

Definice 16 (projekce) *Nechť* $n \in \mathbb{N}$ *a* $i \in \{1, \ldots, n\}$. *Pak* *i-tá projekce* $p_{n,i}$ *je funkce*

$$p_{n,i}(\overline{x}) = p_{n,i}(x_1, \ldots, x_n)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ p_{n,i}(\overline{x}) := x_i\,.$$

Úloha 17 *Ukažte, že každá projekce $p_{n,i}(\overline{x})$ je spojitá.*

Přejděme k operacím, které kombinují jednoduché elementární funkce více proměnných do složitějších. Začneme aritmetickými operacemi.

Definice 18 (součet, součin a podíl funkcí) *$f\colon A \to \mathbb{R}$ a $g\colon B \to \mathbb{R}$ buďte dvě funkce definované na $A, B \subset \mathbb{R}^n$. Definujeme následující funkce.*

1. *Součet $f + g\colon A \cap B \to \mathbb{R}$ s hodnotami $(f+g)(a) := f(a) + g(a)$.*
2. *Součin $f \cdot g = fg\colon A \cap B \to \mathbb{R}$ s hodnotami $(fg)(a) := f(a)g(a)$.*
3. *Podíl $f/g\colon A \cap B \setminus Z(g) \to \mathbb{R}$ s hodnotami $(f/g)(a) := f(a)/g(a)$, kde $Z(g) := \{b \in B\colon\ g(b) = 0\}$.*

Úloha 19 *Spočítejte $k_1(x) + k_0(x)$, $k_1(x) \cdot k_0(x)$, $k_1(x)/x$ a $k_1(x)/k_0(x)$.*

Na rozdíl od dělení čísel, kdy dělení nulou není definováno, je podíl dvou funkcí vždy definován.

Skládání funkcí více proměnných je trochu složitější.

Definice 20 (skládání) *Předpokládejme, že $f = f(y_1, \ldots, y_m)\colon A \to \mathbb{R}$ s $A \subset \mathbb{R}^m$ a $g_i = g_i(x_1, \ldots, x_n)\colon B_i \to \mathbb{R}$ s $B_i \subset \mathbb{R}^n$ pro $i = 1, \ldots, m$ je $m+1$ funkcí. Definujeme jejich složení*

$$f(\overline{g}) = f(g_1, \ldots, g_m)\colon D(f(\overline{g})) \to \mathbb{R}$$

tak, že má definiční obor

$$D(f(\overline{g})) := \{\overline{a} \in \textstyle\bigcap_{i=1}^m B_i\colon\ \langle g_1(\overline{a}), \ldots, g_m(\overline{a})\rangle \in A\} \quad (\subset \mathbb{R}^n)$$

a hodnoty

$$f(\overline{g})(\overline{a}) := f(g_1(\overline{a}), \ldots, g_m(\overline{a}))\,.$$

Nyní můžeme definovat *elementární funkce* více proměnných. V následující definici je funkce libovolná funkce tvaru

$$f = f(x_1, \ldots, x_n)\colon A \to \mathbb{R}$$

s $A \subset \mathbb{R}^n$.

Definice 21 (elementární funkce) *Řekneme, že funkce f je elementární, jestliže existuje taková konečná posloupnost*

$$g = \langle f_1,\, f_2,\, \ldots,\, f_k \rangle$$

$k \in \mathbb{N}$ funkcí f_i, že $f_k = f$ a že pro každý index $i \in \{1, \ldots, k\}$ je funkce $f_i = f_i(x_1, \ldots, x_n)$ buď jednou ze základních funkcí v Definici 15 nebo jednou z projekcí v Definici 16, anebo nastane jeden z následujících dvou případů.

1. *Pro nějaké dva indexy $j, j' < i$ je $f_i = f_j + f_{j'}$ nebo $f_i = f_j \cdot f_{j'}$ nebo $f_i = f_j / f_{j'}$ podle Definice 18.*

2. *Pro nějakých $m + 1$ indexů $j, j_1, \ldots, j_m < i$ je $f_j = f_j(y_1, \ldots, y_m)$, $f_{j_l} = f_{j_l}(x_1, \ldots, x_n)$ pro $l = 1, \ldots, m$ a*

   $$f_i = f_j(f_{j_1},\, \ldots,\, f_{j_m})$$

   podle Definice 20.

Můžeme (méně přesně) říci, že elementární funkce více proměnných vznikají opakovaným sčítáním, násobením, dělením a skládáním, přičemž se vychází ze základních funkcí a z projekcí. Identická funkce $f_0 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s jednou proměnnou $f_0(x) = x$ je elementární, protože $f_0(x) = p_{1,1}(x)$ nebo $f_0(x) = \log(\exp x)$. Konečná posloupnost (slovo) g se nazývá generující slovo elementární funkce $f = f_k$. Generující slova se používají (nebo by se měla používat) v matematické logice v definicích formulí. Například $f(x, y, z) = \frac{\exp(x+y)}{x^3 - z^3}$ je elementární funkce, protože ji lze vyjádřit jako

$$\exp(p_{3,1}(x,\, y,\, z) + p_{3,2}(x,\, y,\, z))/(p_{3,1}(x,\, y,\, z)^3 - p_{3,3}(x,\, y,\, z)^3)\,,$$

kde jmenovatel je explicitně

$$\begin{aligned}&\big((p_{3,1}(x,\, y,\, z) \cdot p_{3,1}(x,\, y,\, z)) \cdot p_{3,1}(x,\, y,\, z)\big) + \\ &+ \big(k_{-1}(p_{3,3}(x,\, y,\, z)) \cdot ((p_{3,3}(x,\, y,\, z) \cdot p_{3,3}(x,\, y,\, z)) \cdot p_{3,3}(x,\, y,\, z))\big)\,.\end{aligned}$$

Úloha 22 *Když nahradíme $k_{-1}(p_{3,3}(x, y, z))$ výrazem $k_{-1}(p_{3,i}(x, y, z))$ pro $i \in \{1, 2\}$, změní se něco?*

Úloha 23 *Každý člen každého generujícího slova je elementární funkce.*

Úloha 24 *Polynomy v několika proměnných, např.* $x^2y^2-z^2+1$*, a racionální funkce v několika proměnných, např.* $\frac{3xy}{xyz+6}$*, jsou vždy elementární.*

Pár dalších vlastností spojitých zobrazení

Ukážeme, že elementární funkce jsou spojité.

Tvrzení 25 *Každá elementární funkce více proměnných z Definice 21 je spojitá.*

Důkaz. Ukážeme indukcí podle indexu i funkce f_i v generujícím slově $g = \langle f_1, \ldots, f_k \rangle$ funkce $f = f_k$, že f_i je spojitá. Je-li $i = 1$, pak $f_i = f_1$ je základní funkce z Definice 15 nebo projekce z Definice 16. V prvním případě je f_1 spojitá podle výsledků z kurzu *MA1*. V druhém případě je f_1 spojitá podle Cvičení 17. Nechť $i > 1$. Je-li f_i základní funkce nebo projekce, je hotovo stejně jako v případě $i = 1$. Předpokládejme, že f_i je součet, součin, podíl nebo složení funkcí v g s indexy menšími než i. Potom je f_i spojitá podle indukčního předpokladu a podle Tvrzení 10 a 14. □

Připomeňme si čtyři věty, kterým teď budeme říkat tvrzení, o spojitých zobrazeních mezi metrickými prostory, které zazněly a byly dokázány v minulých přednáškách. $M = \langle M, d \rangle$ a $N = \langle N, e \rangle$ jsou metrické prostory, $X \subset M$ a $f\colon M \to N$ je spojité zobrazení.

Tvrzení 26 *Je-li X kompaktní, pak $f[X]$ je kompaktní podmnožina v N.*

Tvrzení 27 *Je-li M kompaktní, pak je f stejnoměrně spojité.*

Tvrzení 28 *Je-li X kompaktní a $N = \mathbb{R}$, pak f nabývá na X minima a maxima.*

Tvrzení 29 *Je-li X souvislá, pak $f[X]$ je souvislá podmnožina v N.*

Tato tvrzení jsou po řadě Tvrzení 41 v přednášce 3, Věta 40 v přednášce 3, Věta 46 v přednášce 3 a Věta 6 v přednášce 4.

V Tvrzení 48 z přednášky 3 jsme dokázali, že pokud $f\colon T \to U$ je spojité prosté zobrazení mezi topologickými prostory, T je kompaktní a U je Hausdorffův prostor, pak je inverze $f^{-1}\colon f[T] \to T$ spojitá. Nyní to znovu dokážeme pro metrické prostory pomocí sekvenční kompaktnosti.

Tvrzení 30 *Nechť $M = \langle M, d\rangle$ a $N = \langle N, e\rangle$ jsou metrické prostory, M je kompaktní a $f\colon M \to N$ je spojité prosté zobrazení. Potom je inverze*

$$f^{-1}\colon f[M] \to M$$

spojité zobrazení.

Důkaz. Nechť M je kompaktní, $b \in f[M]$ a nechť

$$(b_n) \subset f[M] \text{ je taková posloupnost, že } \lim b_n = b\,.$$

Položme $a := f^{-1}(b)$ a $a_n := f^{-1}(b_n)$ $(\in M)$. Ukážeme, že $\lim a_n = a$, což podle Tvrzení 9 dokazuje spojitost f^{-1} v bodě b. Ukážeme, že každá podposloupnost posloupnosti (a_n) má podposloupnost s limitou a. Potom Úloha 31 implikuje, že $\lim a_n = a$. Nechť (a'_n) je podposloupnost posloupnosti (a_n). Využijeme kompaktnosti M a vybereme takovou podposloupnost (a_{m_n}) posloupnosti (a'_n), že $\lim a_{m_n} = c \in M$. Podle Tvrzení 9 platí $\lim f(a_{m_n}) = f(c)$. Protože $(f(a_{m_n}))$ je podposloupnost posloupnosti (b_n), máme $f(c) = b$. Ale f je prosté, takže $c = a$. □

Úloha 31 *Nechť $a \in M$ a nechť $(a_n) \subset M$ je taková posloupnost v metrickém prostoru M, že každá podposloupnost posloupnosti (a_n) má podposloupnost s limitou a. Dokažte, že* $\lim a_n = a$.

V klasické situaci, kdy $f\colon X \to \mathbb{R}$ s $X \subset \mathbb{R}$ je spojitá prostá funkce, umíme dokázat spojitost inverzu $f^{-1}\colon f[X] \to X$ v každém z následujících případů.

1. X je kompaktní množina.
2. X je interval.
3. X je otevřená množina.
4. X je uzavřená množina a f je monotónní funkce.
5. $X \subset (a, b)$, X je hustá v intervalu (a, b) a f je monotónní a stejnoměrně spojitá.

V obecném případě zobrazení mezi metrickými prostory jsme zatím uvažovali jen případ 1. Přednášku uzavřeme jednoduchou větou a cvičením, jež ukazuje, že obecně se spojitost v inverzech nezachovává.

Věta 32 (spojité inverzy) *Nechť $M = \langle M, d\rangle$ a $N = \langle N, e\rangle$ jsou metrické prostory. Nechť $f\colon M \to N$ je prosté zobrazení a nechť $c > 0$ je taková reálná konstanta, že pro všechna $x, y \in M$ platí*

$$e(f(x),\, f(y)) \geq c \cdot d(x,\, y)\,.$$

Potom je inverzní zobrazení $f^{-1}\colon f[M] \to M$ spojité.

Důkaz. Nechť $b \in M$, nechť $c := f(b) \in f[M]$ a nechť je dáno $\varepsilon > 0$. Položme $\delta := c \cdot \varepsilon$ a ukažme, že

$$f^{-1}[B_N(c,\, \delta)] \subset B_M(f^{-1}(c),\, \varepsilon) = B_M(b,\, \varepsilon)$$

— f^{-1} je spojité v bodě c. Pokud tomu tak není, pak existuje takový bod $c' \in B_N(c, \delta) \cap f[M]$ s (nutně) $c' \neq c$, že $f^{-1}(c') =: b'$ neleží v $B_M(b, \varepsilon)$. Pak

$$c \cdot d(b',\, b) \geq c \cdot \varepsilon = \delta > e(c',\, c) = e(f(b'),\, f(b))\,,$$

což je spor s předpokládanou vlastností konstanty c. □

Úloha 33 *Nechť $f\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ je injekce definovaná předpisem*

$$f(0) := 0 \;\; a \;\; f(n) := \tfrac{1}{n} \;\ldots\; n \in \mathbb{N}\,.$$

Ukažte, že f je spojitá, ale že inverzní funkce f^{-1} není spojitá (kde?).