Matematická analýza 2 (MA2) – Přednáška 5

Martin Klazar

29. října 2026

Úplné texty přednášek jsou na `https://kam.mff.cuni.cz/~klazar/MAII26cz.html`
a předpokládá se, že se z nich studentky a studenti budou učit; tyto slajdy jsou jen přehledy.

Tato přednáška

1. Část 2: Diferenciální počet více proměnných
2. Limity zobrazení mezi metrickými prostory
3. Vlastnosti limit zobrazení
4. Vlastnosti spojitých zobrazení

Neopouštíme metrické prostory!

Začínáme Část 2 (diferenciální počet více proměnných). Než se dostaneme k derivacím (které v této přednášce ještě nebudou), budeme probírat následující témata.

- Vlastnosti limit zobrazení $f : X \to N$, kde $X \subset M$, pro metrické prostory M a N.
- Vlastnosti spojitých zobrazení $f : M \to N$.

Zvláště nás zajímá, jak se limity a spojitost chovají vůči aritmetickým operacím, když $M = \mathbb{R}^n = E_n$ nebo $N = \mathbb{R}^m = E_m$. Připomeňme, že E_n je úplný metrický prostor a že kompaktní množiny v E_n jsou právě ty množiny, které jsou uzavřené a omezené.

Koule bez středu, hromadné body, vlastní limity zobrazení

- Pro kouli $B_M(b,r)$ v metrickém prostoru M definujeme *kouli bez středu* jednoduše tak, že z koule odstraníme její střed: $C_M(b,r) := B_M(b,r) \setminus \{b\}$.
- Bod $b \in M$ je *hromadným bodem* množiny $X \subset M$, jestliže $\forall r > 0\colon\ C_M(b,r) \cap X \neq \emptyset$.

Definice (vlastní limita zobrazení)

Nechť $M = \langle M, d\rangle$, $N = \langle N, e\rangle$ jsou metrické prostory, $X \subset M$, $f\colon X \to N$ a $b \in M$ je hromadný bod množiny X. Řekneme, že

$$\lim_{x\to b} f(x) = c \ \ (\in N)$$

jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje takové $\delta > 0$, že

$$f\big[C_M(b,\delta)\big] \subset B_N(c,\varepsilon).$$

Připomeňme, že $f[C_M(b,\delta)] = f[C_M(b,\delta) \cap X]$. Proč předpokládáme, že b je hromadný bod množiny X?

Nekonečné limity zobrazení

Pro $N = \mathbb{R} = E_1$ připouštíme nekonečné hodnoty limit.

Definice (nekonečná limita zobrazení)

Nechť $M = \langle M, d \rangle$ je metrický prostor, $X \subset M$, $f : X \to \mathbb{R}$ a $b \in M$ je hromadný bod množiny X. Řekneme, že

$$\lim_{x \to b} f(x) = +\infty \quad (\text{resp. } = -\infty)$$

jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje takové $\delta > 0$, že

$$f\big[C_M(b, \delta)\big] \subset (\varepsilon^{-1}, +\infty) \quad (\text{resp. } \subset (-\infty, -\varepsilon^{-1})).$$

V kurzu *MA1* jsme kromě nekonečných hodnot limit uvažovali také limity v nekonečnu; např. $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$. Kvůli jednoduchosti výkladu (věci jsou už tak dost komplikované :-)) to zde dělat nebudeme. Tedy když píšeme $x \to b$, vždy je $b \in M$.

Vlastnosti limit zobrazení 1: restrikce

Limita zobrazení se nezmění, pokud zobrazení zúžíme.

Tvrzení

Nechť $\langle M, d\rangle$ a $\langle N, e\rangle$ jsou metrické prostory, $X \subset M$, $f : X \to N$, $b \in M$ je hromadný bod množiny X a nechť $Y \subset M$ splňuje, že b je stále hromadným bodem množiny $Y \cap X$. Pak platí

$$\lim_{x\to b} f(x) = C \ (\in \{c, -\infty, +\infty\}) \Rightarrow \lim_{x\to b} (f \mid Y)(x) = C.$$

Důkaz.

Implikace plyne z inkluze $C_M(b, \delta) \cap Y \cap X \subset C_M(b, \delta) \cap X$. Dokonce můžeme říci silněji: pro dané ε funguje pro $f \mid Y$ stejné δ jako pro f. □

Cvičení: ukažte, že obecně nelze implikaci obrátit.

Vlastnosti limit zobrazení 2: souřadnicové limity

Pro $N = \mathbb{R}^m = E_m$ lze limitu zobrazení do N zredukovat na limity souřadnicových funkcí.

Tvrzení

Nechť $m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, $M = \langle M, d\rangle$ je metrický prostor, $X \subset M$, $F = \langle f_1, \ldots, f_m\rangle \colon X \to \mathbb{R}^m$, $b \in M$ je hromadný bod množiny X a $\overline{c} = \langle c_1, \ldots, c_m\rangle \in \mathbb{R}^m$. Potom

$$\lim_{x\to b} F(x) = \overline{c} \iff \forall\, i = 1, \ldots, m\colon \lim_{x\to b} f_i(x) = c_i\,.$$

Důkaz.

Dokážeme $\Rightarrow$. Nechť $\lim_{x\to b} F(x) = \overline{c}$, nechť $i \in \{1, \ldots, m\}$ a nechť je dáno $\varepsilon > 0$. Pak existuje takové $\delta > 0$, že kdykoli $x \in X$ a $0 < d(x, b) < \delta$, platí $\|F(x) - \overline{c}\| < \varepsilon$. Pro stejné x tedy

$$|f_i(x) - c_i| \le \sqrt{\textstyle\sum_{j=1}^{m} (f_j(x) - c_j)^2} = \|F(x) - \overline{c}\| < \varepsilon$$

a vidíme, že $\lim_{x\to b} f_i(x) = c_i$. Opačná implikace $\Leftarrow$ je cvičení. □

Limity $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ v bodě $\langle 0,0\rangle$ ukazující, že iterované limity nepomáhají

Nechť $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a $\overline{0} = \langle 0,0\rangle$. Člověk by se mohl pokusit spočítat limitu $\lim_{\overline{x}\to\overline{0}} f(\overline{x})$ jako iterovanou limitu $\lim_{x_1\to 0}\lim_{x_2\to 0} f(x_1,x_2)$ nebo $\lim_{x_2\to 0}\lim_{x_1\to 0} f(x_1,x_2)$. Následující tři příklady, které jsou pro vás cvičení, ukazují, že tato metoda nefunguje. Nedefinované hodnoty funkce f nastavíme na 0.

- $f(x_1,x_2) = \dfrac{x_1x_2}{x_1^2+x_2^2}$: obě iterované limity jsou 0, ale dvourozměrná limita neexistuje.
- $f(x_1,x_2) = \dfrac{x_1^2-x_2^2}{x_1^2+x_2^2}$: dvě iterované limity se neshodují (1 vs. -1).
- $f(x_1,x_2) = x_1 + x_2\sin(1/x_1)$: jedna iterovaná limita neexistuje, druhá = dvourozměrná limita = 0.

Aritmetika v $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$

Abychom mohli přesně zacházet s nekonečnými limitami, potřebujeme přesnou aritmetiku zahrnující nekonečna. Aritmetiku ve struktuře $\mathbb{R}^* = \langle \mathbb{R}^*, 0, 1, +, \cdot, /, < \rangle$ definujeme následovně. Obvyklou aritmetiku v $\langle \mathbb{R}, 0, 1, +, \cdot, /, < \rangle$ rozšíříme o tato pravidla:

- $a + (+\infty) = (+\infty) + a = +\infty$ pro libovolné $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$,
- $a + (-\infty) = (-\infty) + a = -\infty$ pro libovolné $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$,
- $a \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot a = \pm\infty$ pro libovolné reálné $a > 0$ a
- $a \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot a = \mp\infty$ pro libovolné reálné $a < 0$ (všude horní nebo všude dolní znaménka),
- $(\pm\infty) \cdot (\pm\infty) = +\infty$ a $(\pm\infty) \cdot (\mp\infty) = -\infty$ (všude horní nebo všude dolní znaménka),
- $(\pm\infty)/a = \pm\infty$ pro libovolné reálné $a > 0$ a
- $(\pm\infty)/a = \mp\infty$ pro libovolné reálné $a < 0$ (všude horní nebo všude dolní znaménka),
- $a/(\pm\infty) = 0$ pro libovolné reálné a a konečně
- $-\infty < +\infty$, $-\infty < a$ a $a < +\infty$ pro libovolné reálné a.
- Znaménka měníme takto: $-(\pm\infty) = \mp\infty$.

Neurčité výrazy. Vlastnosti limit zobrazení 3: Heine

Výrazy výše nezmíněné,

$$(+\infty)+(-\infty),\ (-\infty)+(+\infty),\ 0\cdot(\pm\infty),\ (\pm\infty)\cdot 0,\ \frac{\pm\infty}{\pm\infty},\ \text{a}\ \frac{A}{0}$$

(v libovolné kombinaci znamének a pro $A \in \mathbb{R}^*$) jsou neurčité výrazy; jejich hodnoty nejsou definovány.

Věta (limity zobrazení v Heineově pojetí)

Nechť M, N, X, f, b a $C \in \{c, -\infty, +\infty\}$ jsou jako ve dvou výše uvedených definicích limit. Pak

$$\lim_{x\to b} f(x) = C \iff \forall\,(a_n) \subset X \setminus \{b\}\colon \lim_{n\to\infty} a_n = b \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(a_n) = C\,.$$

Důkaz.

(Náčrt.) Implikace $\Rightarrow$ je jednoduchá. V implikaci $\neg \Rightarrow \neg$ definujeme špatnou posloupnost (a_n) pomocí AC (axiomu výběru). □

Aritmetika limit reálných posloupností

Opíráme se o následující větu obsaženou v kurzu *MA1* (když jsem jej vyučoval).

Věta (aritmetika limit reálných posloupností)

Nechť $(a_n), (b_n) \subset \mathbb{R}$ *jsou takové reálné posloupnosti, že* $\lim_{n\to\infty} a_n = C$ *a* $\lim_{n\to\infty} b_n = D$, *kde* $C, D \in \mathbb{R}^*$. *Platí následující.*

1. *Jestliže výraz* $C + D$ *není neurčitý, pak* $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = C + D$.
2. *Jestliže výraz* CD *není neurčitý, pak* $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = CD$.
3. *Jestliže výraz* C/D *není neurčitý, pak* $\lim_{n\to\infty} a_n/b_n = C/D$.

V bodě 3 ignorujeme případně konečně mnoho nedefinovaných podílů a_n/b_n *s* $b_n = 0$.

Cvičení: jestliže výraz C/D není neurčitý, pak $b_n = 0$ jen pro konečně mnoho n.
S pomocí dvou předchozích vět odvodíme aritmetiku limit zobrazení.

Vlastnosti limit zobrazení 4: aritmetika limit

Důsledek (aritmetika limit zobrazení)

Nechť $M = \langle M, d \rangle$ je metrický prostor, $X \subset M$, nechť $f, g \colon X \to \mathbb{R}$ a $b \in M$ je hromadný bod množiny X. Nechť $\lim_{x \to b} f(x) = C$ a $\lim_{x \to b} g(x) = D$, kde $C, D \in \mathbb{R}^*$. Platí následující.

1. *Jestliže výraz $C + D$ není neurčitý, pak $\lim_{x \to b}(f + g)(x) = C + D$.*
2. *Jestliže výraz CD není neurčitý, pak $\lim_{x \to b}(fg)(x) = CD$.*
3. *Jestliže výraz C/D není neurčitý, pak $\lim_{x \to b}(f/g)(x) = C/D$.*

Ideje důkazu: použijeme dvě předchozí věty.

Tvrzení (limity lineárních kombinací)

Nechť $m \in \mathbb{N}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $M = \langle M, d \rangle$ je metrický prostor, $X \subset M$, nechť $F, G \colon X \to \mathbb{R}^m$ a $b \in M$ je hromadný bod množiny X. Nechť $\lim_{x \to b} F(x) = \overline{c}$ a $\lim_{x \to b} G(x) = \overline{d}$. Potom $\lim_{x \to b}(\alpha F + \beta G)(x) = \alpha \overline{c} + \beta \overline{d}$.

Vlastnosti limit zobrazení 5: Cauchyho podmínka

Důkaz.

(Nástin) Pro $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ a $u, v \in \mathbb{R}^m$ použijeme nerovnost $\|\alpha u + \beta v\| \leq |\alpha| \cdot \|u\| + |\beta| \cdot \|v\|$. □

Věta (Cauchyho podmínka)

Nechť $M = \langle M, d \rangle$ a $N = \langle N, e \rangle$ jsou metrické prostory, přičemž N je úplný. Nechť $X \subset M$, $f : X \to N$ a nechť $b \in M$ je hromadný bod množiny X. Pak limita $\lim_{x \to b} f(x)$ existuje $\iff$ pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ a taková koule B_N o poloměru ε, že

$$f[C_M(b, \delta)] \subset B_N .$$

Důkaz.

(Nástin) Implikace $\Rightarrow$ je přímočará. Pro důkaz $\Leftarrow$ nejprve definujeme $c := \lim f(a_n)$ $(\in N)$ pro nějakou posloupnost $(a_n) \subset X \setminus \{b\}$ s $\lim a_n = b$. Poté ukážeme, že i $\lim_{x \to b} f(x) = c$. □

Vlastnosti limit zobrazení 6: monotónní zobrazení

Následující definice monotónnosti je inspirována kvazimonotónními posloupnostmi v $\mathbb{R}$.

Definice (f roste/klesá v bodě b)

Nechť $M = \langle M, d\rangle$ je metrický prostor, $X \subset M$, $f\colon X \to \mathbb{R}$, a nechť $b \in M$ je hromadný bod množiny X. Řekneme, že f roste v bodě b, jestliže pro každé $a \in X \setminus \{b\}$ existuje $\delta > 0$, že

$$\forall\, c \in C_M(b, \delta) \cap X\colon\ f(c) \geq f(a)\,.$$

Abychom definovali, že f klesá v bodě b, obrátíme poslední nerovnost.

Věta (limity monotónních zobrazení)

Nechť $M = \langle M, d\rangle$ je metrický prostor, $X \subset M$, $f\colon X \to \mathbb{R}$, a nechť $b \in M$ je hromadný bod množiny X. Pokud f roste (resp. klesá) v bodě b, pak

$$\lim_{x \to b} f(x) = \sup(f[X \setminus \{b\}]) \quad (\textit{resp.}\ = \inf(f[X \setminus \{b\}])) \quad (\in \mathbb{R}^*).$$

Vlastnosti limit zobrazení 7: Bolzano–Weierstrass

Supremum a infimum v předchozí větě jsou brány v lineárním uspořádání $\langle \mathbb{R}^*, < \rangle$. Ukažte jako cvičení, že každá množina v něm má infimum i supremum.

Důkaz.

(Náčrt) Podobně jako důkaz pro reálné posloupnosti. □

Posloupnost $(a_n) \subset M$ je omezená, jestliže $(a_n) \subset B_M$ pro nějakou kouli B_M.

Tvrzení (jednoduchá Bolzanova–Weierstrassova věta)

Nechť $\langle M, d \rangle$ je metrický prostor, v němž každá uzavřená koule je kompaktní. Pak každá omezená posloupnost $(a_n) \subset M$ má konvergentní podposloupnost (podposloupnost s limitou).

Důkaz.

Cvičení. □

Cvičení: každá omezená posloupnost v prostoru E_m má konvergentní podposloupnost.

Vlastnosti limit zobrazení 8: složené limity

Pro $g\colon A \to B$ a $f\colon A' \to B'$ nechť $D(f(g)) = \{a \in A\colon\ g(a) \in A'\}$ (def. obor zobrazení $f(g)$).

Věta (složené limity)

Nechť $\langle M, d\rangle$, $\langle N, e\rangle$ a $\langle P, h\rangle$ jsou tři metrické prostory, $X \subset M$, $Y \subset N$, $g\colon X \to N$, $f\colon Y \to P$, $b \in M$ je hromadný bod X, $c \in N$ je hromadný bod Y a nechť b je také hromadný bod $D(f(g))$. Předpokládejme, že $\lim_{x\to b} g(x) = c$ a $\lim_{y\to c} f(y) = p \in P$. Potom má složené zobrazení $f(g)$ limitu

$$\lim_{x\to b} f(g)(x) = p$$

právě tehdy, když platí jedna ze dvou podmínek.

1. *Buď $c \notin Y$, nebo $c \in Y$ a $f(c) = p$.*
2. *Pro nějaké $\theta > 0$ je $c \notin g[C_M(b, \theta)]$.*

Neplatí-li ani jedna podmínka, pak $c \in Y$, $f(c) \neq p$ a $\lim_{x\to b} f(g)(x)$ neexistuje nebo je $f(c)$.

Vlastnosti spojitých zobrazení 1: věta o mezihodnotách

Vyplatí se přečíst si důkaz předchozí věty ve skriptech.

Věta (o mezihodnotách)

Nechť $M = \langle M, d \rangle$ je souvislý metrický prostor a nechť $f : M \to \mathbb{R}$ je spojité zobrazení. Nechť $a, b \in M$ a $c \in \mathbb{R}$ jsou takové, že

$$f(a) < c < f(b)\,.$$

Pak existuje takový bod $e \in M$, že $f(e) = c$.

Důkaz.

S tím, co jsme se dosud naučili, je důkaz snadný. Podle Věty 6 ve 4. přednášce je obraz $f[M]$ souvislá podmnožina $\mathbb{R}$. Podle Věty 2 ve stejné přednášce je $f[M]$ interval. Protože $f(a), f(b) \in f[M]$, platí také $c \in f[M]$ a je hotovo. □

Děkuji!

DĚKUJI ZA POZORNOST!