MA2 – přednáška 5

Martin Klazar

29. října, 2026

Abstrakt

Začínáme druhou část kurzu, která je věnována diferenciálnímu počtu funkcí více proměnných. Než se dostaneme k derivacím, budeme na obecné úrovni metrických prostorů studovat limity zobrazení a jejich spojitost, zejména souvislost s aritmetickými operacemi. Prostory specializujeme na $\mathbb{R}^n$ jen když potřebujeme aritmetiku nebo uspořádání. Získáme následující analogie jednorozměrných výsledků pro funkce a posloupnosti: aritmetika limit, Cauchyho podmínka, věta o limitě monotónních zobrazení, Bolzanova–Weierstrassova věta, věta o limitě složených zobrazení a zobecnění věty o mezihodnotě na souvislé prostory.

Část 2. Vícerozměrný diferenciální počet

Druhá část tohoto kurzu je věnována vícerozměrnému diferenciálnímu počtu. Než přejdeme k derivacím funkcí a zobrazení $f\colon X \to \mathbb{R}$ a $f\colon X \to \mathbb{R}^m$, kde $X \subset \mathbb{R}^n$, probereme na obecné úrovni metrických prostorů limity zobrazení a jejich spojitost. Zvlášť nás bude zajímat jejich souhra s aritmetickými operacemi. Pokud budeme tyto operace nebo uspořádání potřebovat, omezíme se na prostory $\mathbb{R}^n$. Připomeňme, že $\mathbb{R}^n = E_n$ je úplný metrický prostor s metrikou e_n. V E_n jsou kompaktní množiny právě uzavřené a omezené množiny. E_n je normovaný prostor, dokonce prostor se skalárním součinem, a vzdálenost $e_n(\overline{x}, \overline{y})$ budeme zapisovat jako $\|\overline{x} - \overline{y}\|$. Eukleidovská norma $\|\cdot\|$ je dána vztahem

$$\|\overline{x}\| = \|\langle x_1, x_2, \ldots, x_n\rangle\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}\,.$$

Limity zobrazení mezi metrickými prostory

Pro libovolnou kouli $B(b,r)$ v metrickém prostoru M definujeme kouli bez středu $C(b,r)$ předpisem

$$C_M(b,\,r) = C(b,\,r) := B(b,\,r) \setminus \{b\} \quad (\subset M)\,.$$

Nechť $X \subset M$ a $b \in M$. Bod b se nazývá *hromadný bod* množiny X, jestliže

$$\forall\, r > 0\colon\ C(b,\,r) \cap X \neq \emptyset\,.$$

Úloha 1 *Ukažte, že b je hromadný bod množiny X, právě když existuje taková posloupnost $(a_n) \subset X \setminus \{b\}$, že $\lim_{n\to\infty} a_n = b$.*

Definice 2 (limity zobrazení) *Nechť $M = \langle M, d\rangle$ a $N = \langle N, e\rangle$ jsou metrické prostory, $X \subset M$, $f\colon X \to N$, $b \in M$ je hromadný bod množiny X a nechť $c \in N$. Jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že*

$$f[C_M(b,\,\delta)] \subset B_N(c,\,\varepsilon)\,,$$

pak píšeme $\lim_{x\to b} f(x) = c$ nebo $f(x) \to c$ pro $x \to b$ a říkáme, že f má v bodě b limitu c.

Připomeňme, že obraz $f[C_M(b,\delta)] = f[C_M(b,\delta) \cap X]$. Jak si pamatujeme z *MA1*, bez předpokladu, že b je hromadný bod množiny X, definice limity nedává dobrý smysl.

Úloha 3 *Proč?*

Jinými slovy, $\lim_{x\to b} f(x) = c$ znamená, že pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že jestliže $a \in X$ a $0 < d(a,b) < \delta$, pak $e(f(a),c) < \varepsilon$.

Je-li $N = E_1$, připouštíme i limity $\pm\infty$. Definujeme $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Aritmetiku v $\mathbb{R}^*$ si zopakujeme později.

Definice 4 (nekonečné limity) *Nechť $M = \langle M, d\rangle$ je metrický prostor, $X \subset M$, $f\colon X \to \mathbb{R}$ a nechť $b \in M$ je hromadný bod množiny X. Jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že*

$$f[C_M(b,\,\delta)] \subset (1/\varepsilon,\,+\infty) =: B_{\mathbb{R}}(+\infty,\,\varepsilon)\,,$$

pak píšeme $\lim_{x\to b} f(x) = +\infty$ nebo $f(x) \to +\infty$ pro $x \to b$ a říkáme, že f má v bodě b limitu $+\infty$. Abychom definovali, že f má v b limitu $-\infty$, nahradíme poslední interval intervalem $(-\infty, -1/\varepsilon) := B_{\mathbb{R}}(-\infty, \varepsilon)$.

V *MA1* jsme měli $M = N = E_1$ a uvažovali jsme také limity $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$ v nekonečnu. Například $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$. Zde se jimi nebudeme zabývat. Vždy, když píšeme $x \to b$, je $b \in M$ prvkem daného prostoru.

Úloha 5 *Přeformulujte Definice 2 a 4 pomocí norem v případě, že $M = E_n$ nebo $N = E_m$.*

Ukážeme, že limity se zachovávají při restrikci. Připomeňme, že jestliže $f\colon A \to B$ je zobrazení a C je libovolná množina, pak restrikce (zúžení) $f \,|\, C\colon A \cap C \to B$ má hodnoty $(f \,|\, C)(x) = f(x)$.

Tvrzení 6 *Nechť M, N, X, f, b a $C \in \{c, -\infty, +\infty\}$ jsou jako v Definicích 2 a 4. Nechť množina $Y \subset M$ je taková, že b je stále hromadným bodem množiny $Y \cap X$. Pak platí*

$$\lim_{x\to b} f(x) = C \Rightarrow \lim_{x\to b} (f \,|\, Y)(x) = C\,.$$

Důkaz. Dokonce lze říci silněji: pro restrikci $f \,|\, Y$ a dané $\varepsilon > 0$ funguje stejné $\delta > 0$ jako pro zobrazení f. Plyne to z inkluze

$$C_M(b,\, \delta) \cap Y \cap X \subset C_M(b,\, \delta) \cap X\,.$$

□

Úloha 7 *Lze implikaci v předešlém tvrzení obrátit?*

Ukážeme, že je-li $N = E_m$, je existence limit zobrazení ekvivalentní existenci limit všech jejich souřadnicových funkcí.

Tvrzení 8 *Nechť $m \in \mathbb{N}$ a $m \geq 2$. Předpokládejme, že $M = \langle M, d\rangle$ je metrický prostor, $X \subset M$, že $F = \langle f_1, \ldots, f_m\rangle\colon X \to \mathbb{R}^m$, že $b \in M$ je hromadný bod množiny X a že $\overline{c} = \langle c_1, \ldots, c_m\rangle \in \mathbb{R}^m$. Potom*

$$\lim_{x\to b} F(x) = \overline{c} \iff \forall\, i = 1,\, \ldots,\, m\colon\ \lim_{x\to b} f_i(x) = c_i\,.$$

Důkaz. Nechť $\lim_{x\to b} F(x) = \overline{c}$, nechť $i \in \{1, \ldots, m\}$ a nechť je dáno $\varepsilon > 0$. Pak existuje $\delta > 0$ tak, že jestliže $x \in X$ a $0 < d(x, b) < \delta$, potom $\|F(x) - \overline{c}\| < \varepsilon$. Pro stejné body x tedy platí

$$|f_i(x) - c_i| \leq \sqrt{\textstyle\sum_{j=1}^{m} (f_j(x) - c_j)^2} = \|F(x) - \overline{c}\| < \varepsilon$$

a vidíme, že $\lim_{x\to b} f_i(x) = c_i$.

Předpokládejme nyní, že $\lim_{x\to b} f_i(x) = c_i$ pro každé $i \in \{1, \dots, m\}$ a že je dáno $\varepsilon > 0$. Pak existuje $\delta > 0$ tak, že pro každé $i \in \{1, \dots, m\}$ a každé $x \in X$ s $0 < d(x, b) < \delta$ máme $|f_i(x) - c_i| < \varepsilon$. Pro stejné body x je tedy

$$\|F(x) - \overline{c}\| = \sqrt{\textstyle\sum_{j=1}^{m} (f_j(x) - c_j)^2} < \sqrt{\textstyle\sum_{j=1}^{m} \varepsilon^2} = \sqrt{m} \cdot \varepsilon$$

a vidíme, že $\lim_{x\to b} F(x) = \overline{c}$. □

Pro $m = 1$ tvrzení triviálně platí, i pro nekonečné limity $\pm\infty$.

Nechť $M = E_n$. Pak bychom se mohli pokusit najít limity

$$\lim_{\overline{x}\to\overline{b}} f(x_1, \dots, x_n)$$

souřadnicových funkcí $f\colon X \to \mathbb{R}$, kde $X \subset \mathbb{R}^n$, tak, že postupně v nějakém pořadí $x_{i_n}, \dots, x_{i_1}$ spočítáme pro všech n proměnných $x_1, \dots, x_n$ takzvanou *iterovanou limitu*

$$\lim_{x_{i_1}\to b_{i_1}} \dots \lim_{x_{i_n}\to b_{i_n}} f(x_1, \dots, x_n)$$

(výpočet začneme od vnitřní limity $\lim_{x_{i_n}\to b_{i_n}}$ a hodnoty $n-1$ proměnných, přes které se nelimití, jsou vždy pevné). Tři následující příklady s funkcemi $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a bodem $\overline{b} = \overline{0} = \langle 0, 0\rangle$ ukazují, že tato myšlenka nefunguje.

Úloha 9 *Nechť* $f(x_1, x_2) = x_1 x_2/(x_1^2 + x_2^2)$ *pro* $x_1^2 + x_2^2 \neq 0$ *a* $f(0, 0) = 0$. *Pak limita* $\lim_{\overline{x}\to\overline{0}} f(x_1, x_2)$ *neexistuje, i když*

$$\lim_{x_1\to 0} \lim_{x_2\to 0} f(x_1, x_2) = \lim_{x_2\to 0} \lim_{x_1\to 0} f(x_1, x_2) = 0\,.$$

Úloha 10 *Nechť* $f(x_1, x_2) = (x_1^2 - x_2^2)/(x_1^2 + x_2^2)$ *pro* $x_1^2 + x_2^2 \neq 0$ *a* $f(0, 0) = 0$. *Pak*

$$\lim_{x_1\to 0} \lim_{x_2\to 0} f(x_1, x_2) = 1 \quad a \quad \lim_{x_2\to 0} \lim_{x_1\to 0} f(x_1, x_2) = -1\,.$$

Úloha 11 *Nechť* $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2 \sin(1/x_1)$ *pro* $x_1 \neq 0$ *a* $f(0, x_2) = 0$. *Pak*

$$\lim_{\overline{x}\to\overline{0}} f(\overline{x}) = \lim_{x_1\to 0} \lim_{x_2\to 0} f(x_1, x_2) = 0\,,$$

ale $\lim_{x_2\to 0} \lim_{x_1\to 0} f(x_1, x_2)$ *neexistuje.*

Tyto příklady jsou převzaty z [1, str. 421–422].

Vlastnosti limit zobrazení

Začneme aritmetikou limit. Připomeňme, že jsou-li $f, g\colon A \to \mathbb{R}$ libovolné funkce, pak součtová funkce $f+g\colon A \to \mathbb{R}$ má hodnoty $(f+g)(a) = f(a) + g(a)$. Součinová funkce fg a podílová funkce f/g jsou definovány obdobně. Připomeneme aritmetiku v

$$\mathbb{R}^* = \langle \mathbb{R}^*,\, 0,\, 1,\, +,\, \cdot,\, /,\, < \rangle \quad (\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty,\, +\infty\})\,.$$

Obvyklou aritmetiku v $\langle \mathbb{R}, 0, 1, +, \cdot, /, < \rangle$ rozšíříme následujícími pravidly: $a + (+\infty) = (+\infty) + a = +\infty$ pro každé $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $a + (-\infty) = (-\infty) + a = -\infty$ pro každé $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $a \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot a = \pm\infty$ pro každé reálné $a > 0$ a $a \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot a = \mp\infty$ pro každé reálné $a < 0$ (všechna horní nebo všechna dolní znaménka), $(\pm\infty) \cdot (\pm\infty) = +\infty$ a $(\pm\infty) \cdot (\mp\infty) = -\infty$ (všechna horní nebo všechna dolní znaménka), $(\pm\infty)/a = \pm\infty$ pro každé reálné $a > 0$ a $(\pm\infty)/a = \mp\infty$ pro každé reálné $a < 0$ (všechna horní nebo všechna dolní znaménka), $a/(\pm\infty) = 0$ pro každé reálné a, a konečně $-\infty < +\infty$, $-\infty < a$ a $a < +\infty$ pro každé reálné a; znaménko měníme pomocí $-(\pm\infty) = \mp\infty$. Nezmíněné výrazy

$$(+\infty) + (-\infty),\ (-\infty) + (+\infty),\ 0 \cdot (\pm\infty),\ (\pm\infty) \cdot 0,\ \frac{\pm\infty}{\pm\infty},\ \text{a}\ \frac{A}{0}$$

(libovolná kombinace znamének a $A \in \mathbb{R}^*$) jsou takzvané neurčité výrazy. Jejich hodnoty nejsou definovány.

Úloha 12 *Spočítejte* $(+\infty) - (-\infty)$, $\frac{-\infty}{-6}$ *a* $(-\infty) \cdot (-\infty)$.

Úloha 13 *Ukažte, že* $\langle \mathbb{R}^*, < \rangle$ *je lineární uspořádání a že každá množina* $X \subset \mathbb{R}^*$ *v něm má infimum i supremum.*

Aritmetiku limit zobrazení odvodíme z aritmetiky limit posloupností. Použijeme Heineho reformulaci Definic 2 a 4.

Věta 14 (Heineho charakterizace limity) *Nechť* M, N, X, f, b *a* $C \in \{c, -\infty, +\infty\}$ *jsou jako v Definicích 2 a 4. Potom*

$$\lim_{x\to b} f(x) = C \iff \forall\, (a_n) \subset X \setminus \{b\}\colon\ \lim_{n\to\infty} a_n = b \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(a_n) = C\,.$$

Důkaz. Nechť $\lim_{x\to b} f(x) = C$, nechť $C = c \in N$, nechť $(a_n) \subset X \setminus \{b\}$ má $\lim a_n = b$ a nechť je dáno $\varepsilon > 0$. Protože $f(x) \to c$ pro $x \to b$, existuje $\delta > 0$ tak, že $a \in C_M(b,\delta) \cap X \Rightarrow f(a) \in B_N(c,\varepsilon)$. Jelikož $a_n \to b$ pro $n \to \infty$ a vždy $a_n \neq b$, existuje n_0 tak, že pro $n \geq n_0$ platí $a_n \in C_M(b,\delta) \cap X$. Tedy pro stejná n máme $f(a_n) \in B_n(c,\varepsilon)$. Vidíme, že $\lim f(a_n) = C$.

Je-li $C \in \{-\infty, +\infty\}$ a $N = E_1$, funguje stejný argument, pouze koule $B_N(c,\varepsilon)$ je nahrazena „koulí“ $B_{\mathbb{R}}(C,\varepsilon)$.

Předpokládejme, že neplatí $\lim_{x\to b} f(x) = C$. Pak existuje $\varepsilon > 0$ tak, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje — podle axiomu výběru — bod $a_n \in C_M(b,n^{-1}) \cap X$ takový, že $f(a_n)$ neleží v $B_N(c,\varepsilon)$, je-li $C = c$, resp. ne v $B_{\mathbb{R}}(C,\varepsilon)$, pokud $C \in \{+\infty, -\infty\}$. Dostaneme tedy posloupnost $(a_n) \subset X \setminus \{b\}$ takovou, že $\lim a_n = b$, ale neplatí $\lim f(a_n) = C$.

□

Použijeme následující větu o limitách posloupností dokázanou v kurzu *MA1*.

Věta 15 (aritmetika limit v MA1) *Nechť $(a_n), (b_n) \subset \mathbb{R}$ jsou takové posloupnosti, že $\lim_{n\to\infty} a_n = C$ a $\lim_{n\to\infty} b_n = D$, přičemž $C, D \in \mathbb{R}^*$. Platí následující.*

1. *Jestliže $C + D$ není neurčitý výraz, pak $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = C + D$.*
2. *Jestliže CD není neurčitý výraz, pak $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = CD$.*
3. *Jestliže C/D není neurčitý výraz, pak $\lim_{n\to\infty} a_n/b_n = C/D$.*

V části 3 ignorujeme případně konečně mnoho nedefinovaných podílů a_n/b_n s $b_n = 0$.

Pokud totiž C/D není neurčitý výraz, pak $D \neq 0$ a jelikož $\lim b_n = D \neq 0$, je $b_n = 0$ jen pro konečně mnoho n.

Důsledek 16 *$M = \langle M, d\rangle$ buď metrický prostor, $X \subset M$ buď množina v M, $f, g\colon X \to \mathbb{R}$ a nechť $b \in M$ je hromadný bod množiny X. Nechť $\lim_{x\to b} f(x) = C$ a $\lim_{x\to b} g(x) = D$, kde $C, D \in \mathbb{R}^*$. Platí následující.*

1. *Když $C + D$ není neurčitý výraz, pak $\lim_{x\to b}(f+g)(x) = C + D$.*
2. *Když CD není neurčitý výraz, pak $\lim_{x\to b}(fg)(x) = CD$.*
3. *Když C/D není neurčitý výraz, pak $\lim_{x\to b}(f/g)(x) = C/D$.*

Důkaz. Dokážeme pouze část 3 a důkazy částí 1 a 2 ponecháme jako cvičení. Předpokládáme, že $\lim_{x\to b} f(x) = C$, $\lim_{x\to b} g(x) = D$ a že C/D není neurčitý výraz. Podle Věty 14 stačí ukázat, že kdykoli $(a_n) \subset M \setminus \{b\}$ je posloupnost s $\lim a_n = b$, pak $\lim(f/g)(a_n) = \lim f(a_n)/g(a_n) = C/D$. Nechť (a_n) je, jak řečeno. Z předpokladů a z Věty 14 plyne, že $\lim f(a_n) = C$ a $\lim g(a_n) = D$. Nyní z části 3 ve Větě 15 dostáváme $\lim f(a_n)/g(a_n) = C/D$. □

Jedna jemnost v předchozím důkazu části 3 spočívá v tom, že na rozdíl od částí 1 a 2 může být definiční obor $Y \subset X$ podílové funkce $(f/g)(x)$ vlastní podmnožinou X, protože body $a \in X$ s $g(a) = 0$ je třeba vynechat.

Úloha 17 *Ukažte, že pokud výraz C/D není neurčitý, pak b je stále hromadným bodem definičního oboru Y funkce f/g.*

Úloha 18 *Dokažte části 1 a 2 důsledku.*

Jak víme z kurzu *MA1*, věta o aritmetice limit nevyčerpává všechny možné výsledky o vztahu mezi limitami a aritmetikou. Jeden takový výsledek, který není pokryt důsledkem, ponecháme jako cvičení.

Úloha 19 *Nechť $M = \langle M, d\rangle$ je metrický prostor, $X \subset M$, nechť $f, g\colon X \to \mathbb{R}$ a $b \in M$ je hromadný bod množiny X. Nechť $\lim_{x\to b} f(x) = 0$ a nechť g je omezená na nějaké kouli bez středu $C_M(b, r)$ $(\cap X)$. Potom*

$$\lim_{x\to b}(fg)(x) = 0\,.$$

Zatímco $\mathbb{R}$ je normované těleso, $\mathbb{R}^m$ pro $m > 1$ je pouze normovaný reálný vektorový prostor. Dokážeme alespoň, že limity zachovávají lineární kombinace.

Tvrzení 20 *Nechť $m \in \mathbb{N}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $M = \langle M, d\rangle$ je metrický prostor, $X \subset M$, nechť $F, G\colon X \to \mathbb{R}^m$ a $b \in M$ je hromadný bod množiny X. Nechť $\lim_{x\to b} F(x) = \overline{c}$ a $\lim_{x\to b} G(x) = \overline{d}$. Potom*

$$\lim_{x\to b}(\alpha F + \beta G)(x) = \alpha\overline{c} + \beta\overline{d}\,.$$

Důkaz. Nechť je dáno $\varepsilon > 0$. Z předpokladů plyne, že existuje takové $\delta > 0$, že z $a \in C_M(b, \delta) \cap X$ plyne $\|F(a) - \overline{c}\|, \|G(a) - \overline{d}\| < \varepsilon$. Tedy pro tytéž body a máme

$$\begin{aligned}&\|(\alpha F + \beta G)(a) - (\alpha\overline{c} + \beta\overline{d})\| = \|\alpha(F(a) - \overline{c}) + \beta(G(a) - \overline{d})\| \\ &\le |\alpha| \cdot \|F(a) - \overline{c}\| + |\beta| \cdot \|G(a) - \overline{d}\| \le \varepsilon(|\alpha| + |\beta|)\,.\end{aligned}$$

Vidíme, že uvedená limita platí. □

Úloha 21 *Vysvětlete první vystavenou nerovnost v důkazu. Proč nemůžeme poslední nerovnost zapsat jako* $< \varepsilon(|\alpha| + |\beta|)$*?*

Uvedeme dva existenční výsledky o limitách zobrazení.

Věta 22 (Cauchyho podmínka) *Nechť* $M = \langle M, d\rangle$ *a* $N = \langle N, e\rangle$ *jsou metrické prostory, přičemž* N *je úplný. Nechť* $X \subset M$, $f\colon X \to N$ *a nechť* $b \in M$ *je hromadný bod množiny* X*. Potom limita* $\lim_{x\to b} f(x)$ *existuje* $\iff$ *pro každé* $\varepsilon > 0$ *existuje* $\delta > 0$ *a koule* B_N *s poloměrem* ε *tak, že*

$$f[C_M(b,\, \delta)] \subset B_N\,.$$

Důkaz. Nechť $\lim_{x\to b} f(x) = c$ pro nějaké $c \in N$ a nechť je dáno $\varepsilon > 0$. Položme $B_N = B_N(c, \varepsilon)$. Z definice limity existuje $\delta > 0$, že $f[C_M(b,\, \delta)] \subset B_N$.

Předpokládejme, že platí pravá strana ekvivalence. Vezměme libovolnou posloupnost $(a_n) \subset X \setminus \{b\}$ s $\lim a_n = b$. Existuje podle Cvičení 1, protože b je hromadný bod množiny X. Podmínka na pravé straně implikuje, že posloupnost $(f(a_n)) \subset N$ je cauchyovská. Využijeme, že N je úplný, a vezmeme limitu $c = \lim f(a_n)$ $(\in N)$. Ukážeme, že $\lim_{x\to b} f(x) = c$. Nechť je dáno $\varepsilon > 0$. Vezměme $\delta > 0$ a kouli $B_N = B_N(c', \varepsilon/4)$ zaručené podmínkou na pravé straně. Nechť $B'_N = B_N(c', \varepsilon/2)$. Tvrdíme, že $c \in B'_N$. Pokud by $c \notin B'_N$, pak $e(c, c') \geq \varepsilon/2$. Pak bychom mohli vzít dostatečně velký index n tak, aby $d(b, a_n) < \delta$ a $e(c, f(a_n)) < \varepsilon/4$. Z TN by pak plynulo $f(a_n) \notin B_N$, což je spor s definicí koule B_N. Tedy $c \in B_N(c', \varepsilon/2)$. Pak pro každé $a \in C_M(b, \delta) \cap X$ platí

$$e(f(a),\, c) \leq e(f(a),\, c') + e(c',\, c) < \varepsilon/4 + \varepsilon/2 < \varepsilon\,,$$

a vidíme, že $\lim_{x\to b} f(x) = c$. □

Je-li $M = \langle M, d\rangle$ metrický prostor, $X \subset M$ a $f\colon X \to \mathbb{R}$, kdy je f monotónní? Následující definice je inspirována kvazimonotónními reálnými posloupnostmi.

Definice 23 (monotónnost) *Nechť* $M = \langle M, d\rangle$ *je metrický prostor,* $X \subset M$*,* $f\colon X \to \mathbb{R}$ *a nechť* $b \in M$ *je hromadný bod množiny* X*. Řekneme, že* f *roste v bodě* b*, jestliže pro každé* $a \in X \setminus \{b\}$ *existuje* $\delta > 0$ *tak, že*

$$\forall\, c \in C_M(b,\, \delta) \cap X\colon\ f(c) \geq f(a)\,.$$

Abychom definovali, že f *klesá v bodě* b*, obrátíme poslední nerovnost.*

Věta 24 (limity monotónních zobrazení) *Nechť $M = \langle M, d\rangle$ je metrický prostor, $X \subset M$, $f\colon X \to \mathbb{R}$ a nechť bod $b \in M$ je hromadný bod množiny X. Pokud f roste v bodě b, pak*

$$\lim_{x\to b} f(x) = \sup(f[X \setminus \{b\}]) \quad (\in \mathbb{R}^*)\,.$$

Pokud f klesá v bodě b, pak

$$\lim_{x\to b} f(x) = \inf(f[X \setminus \{b\}]) \quad (\in \mathbb{R}^*)\,.$$

Supremum i infimum se berou v lineárním uspořádání $\langle \mathbb{R}^*, <\rangle$ (viz cvičení 13).

Důkaz. Předpokládejme, že f roste v bodě b. Důkaz pro klesající f je podobný. Nechť je dáno $\varepsilon > 0$ a položme $A = \sup(f[X \setminus \{b\}])$; potom $A \in \mathbb{R}$ nebo $A = +\infty$. Z definice suprema existuje $a \in X \setminus \{b\}$ tak, že $f(a) \in B_{\mathbb{R}}(A, \varepsilon)$. Jelikož f roste v bodě b a pro každé $a' \in X \setminus \{b\}$ platí $f(a') \le A$, existuje $\delta > 0$ tak, že

$$\forall c \in C_M(b,\,\delta) \cap X\colon\ f(c) \ge f(a),\ \text{ tedy }\ f[C_M(b,\,\delta)] \subset U\,.$$

Vidíme, že $\lim_{x\to b} f(x) = A$. □

Podíváme se na následující zobecnění *Bolzanovy–Weierstrassovy věty* na metrické prostory. Posloupnost $(a_n) \subset M$ v metrickém prostoru M nazveme omezenou, existuje-li taková koule B v M, že $(a_n) \subset B$.

Tvrzení 25 (metrická Bolzanova–Weierstrassova věta) *Nechť $\langle M, d\rangle$ je metrický prostor, v němž každá uzavřená koule je kompaktní. Pak každá omezená posloupnost $(a_n) \subset M$ má konvergentní podposloupnost (podposloupnost s limitou).*

Důkaz. Nechť $(a_n) \subset B = B_M(b, r)$. Pak také $(a_n) \subset \overline{B} = \overline{B}(b, r)$ a (a_n) má konvergentní podposloupnost díky předpokladu o M. □

Úloha 26 *Dokažte, že každá omezená posloupnost v prostoru E_m má konvergentní podposloupnost.*

Dostáváme se k poslednímu výsledku o limitách zobrazení mezi metrickými prostory, který zde zmiňujeme, totiž k *větě o limitě složených zobrazení*. Zobecněné skládání zobrazení probíhá následovně. Nechť $g\colon A \to B$ a $f\colon A' \to B'$ jsou funkce, přičemž A, B, A' a B' jsou libovolné množiny (nevyžadujeme $B = A'$, skládání je proto "zobecněné"). Složené zobrazení $f(g)\colon D(f(g)) \to B'$ má definiční obor

$$D(f(g)) := \{a \in A\colon\ g(a) \in A'\}\ \ (\subset A)$$

a hodnoty $f(g)(a) := f(g(a))$. Jde o typ funkcionálního skládání, který se používá v matematické analýze.

Věta 27 (limita složeného zobrazení) [1] *$\langle M, d\rangle$, $\langle N, e\rangle$ a $\langle P, h\rangle$ buďte tři metrické prostory. Nechť $X \subset M$, $Y \subset N$, $g\colon X \to N$, $f\colon Y \to P$, $b \in M$ je hromadný bod množiny X, $c \in N$ je hromadný bod množiny Y a nechť b je také hromadný bod množiny $D(f(g))$. Předpokládejme, že $\lim_{x\to b} g(x) = c$ a $\lim_{y\to c} f(y) = p \in P$. Potom má složené zobrazení $f(g)$ limitu*

$$\lim_{x\to b} f(g)(x) = p$$

právě tehdy a jen tehdy, když platí jedna ze dvou podmínek.

1. *Buď $c \notin Y$, anebo $c \in Y$ a $f(c) = p$.*
2. *Existuje $\theta > 0$, že $c \notin g[C_M(b, \theta)]$.*

Jestliže neplatí ani jedna z těchto podmínek, pak $c \in Y$, $f(c) \neq p$ a limita $\lim_{x\to b} f(g)(x)$ neexistuje, anebo se rovná $f(c)$ (což není p).

Důkaz. Nechť je dáno $\varepsilon > 0$. Z předpokládaných limit plyne, že

- existuje $\delta' > 0$ tak, že (a) $f[C_N(c, \delta')] \subset B_P(p, \varepsilon)$, a
- existuje $\delta > 0$ tak, že (b) $g[C_M(b, \delta)] \subset B_N(c, \delta')$.

Předpokládejme, že platí podmínka 1. Pak můžeme zesílit inkluzi (a) na inkluzi $f[B_N(c, \delta')] \subset B_P(p, \varepsilon)$ a dostaneme

$$f(g)[C_M(b,\, \delta)] = f[\, g[C_M(b,\, \delta)]\,] \subset f[B_N(c,\, \delta')] \subset B_P(p,\, \varepsilon)\,.$$

[1] V této přesné podobě pochází věta od autora skript.

Odtud $\lim_{x\to b} f(g)(x) = p$. Předpokládejme nyní, že platí podmínka 2. Můžeme zvolit δ tak, aby navíc $\delta \le \theta$, kde θ je jako v podmínce 2. Pak můžeme zesílit inkluzi (b) na $g[C_M(b,\delta)] \subset C_N(c,\delta')$ a

$$f(g)[C_M(b,\,\delta)] = f[\,g[C_M(b,\,\delta)]\,] \subset f[C_N(c,\,\delta')] \subset B_P(p,\,\varepsilon)$$

(Cvičení 28). Opět $\lim_{x\to b} f(g)(x) = p$.

Předpokládejme, že neplatí ani jedna z podmínek. Pak $c \in Y$, $f(c) \neq p$ a (pomocí AC) pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje bod $a_n \in C_M(b, n^{-1}) \cap X$, že $g(a_n) = c$. Potom $(a_n) \subset D(f(g)) \setminus \{b\}$, $\lim a_n = b$ a

$$\lim\, f(g)(a_n) = \lim\, f(g(a_n)) = \lim\, f(c) = f(c) \quad (\neq p)\,.$$

Podle Věty 14 limita $\lim_{x\to b} f(g(x))$ buď neexistuje, anebo se rovná $f(c)$ (což není p). □

Úloha 28 *Vysvětlete poslední čtyři vystavené inkluze v důkazu.*

Vlastnosti spojitých zobrazení

Zobecníme několik výsledků z *MA1* na spojitá zobrazení mezi metrickými prostory. Několik takových zobecnění jsme už dříve uvedli (minimaxová věta, stejnoměrná spojitost spojitých zobrazení na kompaktech, ...). Stále však zbývá pár výsledků, které lze zobecnit.

Nechť $\langle M, d\rangle$ a $\langle N, e\rangle$ jsou metrické prostory a nechť $f\colon M \to N$ je zobrazení. Připomeňme si z přednášky 1, že f je spojité v bodě $b \in M$, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že

$$f[B_M(b,\,\delta)] \subset B_N(f(b),\,\varepsilon)\,.$$

Ekvivalentně, v Heineově stylu: pro každou posloupnost $(a_n) \subset M$ s $a_n \to b$ platí také $f(a_n) \to f(b)$ (přednáška 1). Zobrazení f je spojité, jestliže je spojité v každém bodě prostoru M. Ekvivalentně: pro každou otevřenou množinu $B \subset N$ je vzor $f^{-1}[B]$ otevřená množina v M (přednáška 1).

Zobecníme větu z *MA1* o nabývání mezihodnot spojitou funkcí.

Věta 29 (o mezihodnotách) *Nechť $M = \langle M, d\rangle$ je souvislý metrický prostor a nechť $f\colon M \to \mathbb{R}$ je spojité zobrazení. Nechť $a, b \in M$, $c \in \mathbb{R}$ splňují*

$$f(a) < c < f(b)\,.$$

Pak existuje bod $e \in M$ tak, že $f(e) = c$.

Důkaz. Podle Věty 6 z přednášky 4 je obraz $f[M]$ souvislá podmnožina $\mathbb{R}$. Podle Věty 2 ve stejné přednášce je $f[M]$ interval. Protože $f(a), f(b) \in f[M]$, platí také $c \in f[M]$ a jsme hotovi. □

Reference

[1] V. A. Zorich, *Mathematical Analysis.* I, Springer-Verlag, Berlin 2004