

MA2 – přednáška 2

Martin Klazar

8. října, 2026

Abstrakt

Bez důkazů zmíníme Banachovu větu a Baireovu větu o úplných prostorech. Dokážeme, že součiny úplných prostorů jsou úplné. Ne-standardně definujeme zúplnění metrických prostorů a dokážeme jejich existenci a jednoznačnost. Zavedeme topologie a dokážeme, že každá metrická topologie je normální. Připomeneme Hilbertovy prostory a normované vektorové prostory. Dokážeme Cauchyho–Schwarzovu nerovnost v obecném tvaru. Nakonec definujeme kompaktní metrické prostory.

Ve druhé přednášce řekneme více o úplných metrických prostorech a poté se obrátíme k dalším matematickým strukturám souvisejícím s metrickými prostory. Nakonec definujeme kompaktní metrické prostory.

Dvě věty bez důkazů o úplných prostorech

Zmíníme dvě důležité věty o úplných metrických prostorech. Jejich důkazy vynecháme, protože jak tyto věty, tak jejich aplikace jsou tématy kurzu MA3.

Nechť $M = \langle M, d \rangle$ je metrický prostor a $f: M \rightarrow M$ je zobrazení. Řekneme, že $(a_n) \subset M$ je *posloupnost iterací zobrazení f* , jestliže

$$a_{n+1} = f(a_n) \text{ pro každé } n \in \mathbb{N}.$$

Zobrazení f nazveme *kontraktivní*, existuje-li taková konstanta $c \in [0, 1)$, že

$$d(f(x), f(y)) \leq c \cdot d(x, y) \text{ pro všechna } x, y \in M.$$

Úloha 1 *Ukažte, že kontraktivní zobrazení jsou spojitá.*

Úloha 2 Složení dvou kontraktivních zobrazení je kontraktivní.

Úloha 3 Je zobrazení $f_1(x) = x^2: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ kontraktivní vzhledem k metrice e_1 ? A co zobrazení $f_2(x) = x$ a $f_3(x) = \sqrt{x}$?

Užitečná věta polského matematika *Stefana Banacha* (1892–1945) říká, že pro každý úplný prostor M a každé kontraktivní zobrazení $f: M \rightarrow M$ má rovnice $f(x) = x$ jediné řešení.

Věta 4 (Banachova) Nechť $M = \langle M, d \rangle$ je úplný metrický prostor a nechť $f: M \rightarrow M$ je kontraktivní zobrazení. Potom existuje jediný prvek $a \in M$, že $f(a) = a$. Navíc pro každou posloupnost (a_n) iterací zobrazení f platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a.$$

Řešení rovnice $f(x) = x$ jsou takzvané *pevné body* zobrazení f . Základní věta o existenci řešení diferenciálních rovnic se snadno dokáže s pomocí Banachovy věty.

Úloha 5 Ukažte, že pro libovolné kontraktivní zobrazení f je řešení rovnice $f(x) = x$, existuje-li, jediné.

Následující výsledek o pevných bodech neplyne z Banachovy věty.

Úloha 6 Dokažte, že každá spojitá reálná funkce $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ má pevný bod. Nápoděda: uvažujte funkci $f(x) - x$.

Zavedeme řídké množiny.

Definice 7 (řídké množiny) Nechť $M = \langle M, d \rangle$ je metrický prostor a $X \subset M$. Řekneme, že množina X je řídká (v M), jestliže pro každou kouli B v M existuje taková koule B' v M , že $B' \subset B$ a $B' \cap X = \emptyset$.

Úloha 8 Ukažte, že libovolné konečné sjednocení řídkých množin je řídká množina.

Druhá věta o úplných prostorech, kterou uvedeme bez důkazu, pochází od francouzského matematika *Reného-Louise Baireho* (1874–1932).

Věta 9 (Baireova) *Nechť $M = \langle M, d \rangle$ je úplný metrický prostor. Potom v každém spočetném sjednocení*

$$M = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$$

alespoň jedna množina X_n není řídká.

Jinými slovy, úplný prostor nelze vyjádřit jako spočetné sjednocení řídkých množin.

Úloha 10 *Odvod'te z Baireovy věty, že žádný úplný prostor nelze vyjádřit jako konečné sjednocení řídkých množin.*

Dokážeme zajímavý důsledek Baireovy věty. Bod $b \in M$ v metrickém prostoru M je *izolovaný*, jestliže existuje poloměr r , že koule $B_M(b, r) = \{b\}$.

Úloha 11 *Každý bod v každém diskrétním metrickém prostoru je izolovaný. V žádném eukleidovském prostoru E_n není žádný bod izolovaný.*

Úloha 12 *Bod $b \in M$ v metrickém prostoru M je izolovaný právě tehdy, když množina $\{b\}$ není řídká.*

Důsledek 13 *Předpokládejme, že $M = \langle M, d \rangle$ je úplný metrický prostor a že žádný bod $b \in M$ není izolovaný. Pak je množina M nespočetná.*

Důkaz. Uvažujme sjednocení

$$M = \bigcup_{b \in M} \{b\}.$$

Podle předpokladu a Úlohy 12 je každá množina $\{b\}$ v tomto sjednocení řídká. Podle předpokladu, Věty 9 a Úlohy 10 toto sjednocení nemůže být nanejvýš spočetné. Proto je množina M nespočetná. $\square$

V kurzu *MA3* s pomocí Baireovy věty dokážeme existenci spojitě funkce $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, která není diferencovatelná v žádném bodě $b \in [0, 1]$.

Součiny úplných metrických prostorů

Podle Tvrzení 31 z přednášky 1 je podprostor úplného prostoru M úplný právě tehdy, když jeho nosná množina je uzavřená podmnožina v M . Nyní se budeme zabývat součiny prostorů.

Tvrzení 14 *Nechť $M = \langle M, d \rangle$ a $N = \langle N, e \rangle$ jsou úplné metrické prostory. Potom je součinnový metrický prostor $P = \langle M \times N, d' \rangle$ úplný.*

Důkaz. Nechť $(\bar{c}_n) = (\langle a_n, b_n \rangle)$ je Cauchyovská posloupnost v P . Protože

$$d(a_m, a_n), e(b_m, b_n) \leq d'(\bar{c}_m, \bar{c}_n),$$

posloupnosti (a_n) a (b_n) jsou Cauchyovské posloupnosti v prostorech M a N . Nechť $a := \lim a_n \in M$, $b := \lim b_n \in N$ a $\bar{c} := \langle a, b \rangle$. Jelikož

$$d'(\langle x, y \rangle, \langle x', y' \rangle) \leq d(x, x') + e(y, y')$$

pro všechna $x, x' \in M$ a $y, y' \in N$, podle Úlohy 15 je $\lim \bar{c}_n = \bar{c}$. □

Úloha 15 *Podrobně vysvětlete poslední větu předchozího důkazu.*

Z následující věty a pomocí předchozího tvrzení odvodíme úplnost eukleidovských prostorů E_n .

Věta 16 (z MA1) *Eukleidovský prostor $E_1 = \langle \mathbb{R}, |x - y| \rangle$ je úplný.*

Důsledek 17 *Pro každé $n \in \mathbb{N}$ je eukleidovský prostor E_n úplný.*

Důkaz. Plyne to z Tvrzení 11 v přednášce 1 a z Tvrzení 14 a Věty 16 v této přednášce. □

Zúplnění metrických prostorů

Tato konstrukce zobecňuje konstrukci tělesa reálných čísel $\mathbb{R}$ z tělesa racionálních čísel $\mathbb{Q}$. Začneme definicí hustých množin.

Definice 18 (husté množiny) *$M = \langle M, d \rangle$ buď metrický prostor a $X \subset M$. Řekneme, že množina X je hustá (v M), jestliže $B \cap X \neq \emptyset$ pro každou kouli B v M .*

Úloha 19 *Množina $X \subset M$ je hustá $\iff$ pro každý bod $b \in M \setminus X$ existuje posloupnost $(a_n) \subset X$, že $\lim a_n = b \iff$ taková posloupnost existuje pro každý bod $b \in M$.*

Definujeme zúplnění metrických prostorů.

Definice 20 (zúplnění) *Nechť $M = \langle M, d \rangle$ je metrický prostor. Metrický prostor $C = \langle C, e \rangle$ je zúplněním prostoru M , jestliže M a C mají tři vlastnosti.*

1. M je podprostor prostoru C .
2. Každá Cauchyovská posloupnost $(a_n) \subset M$ má v C limitu.
3. Množina $C \setminus M$ je vzhledem k vlastnosti 2 minimální z hlediska inkluze.

Naše definice není standardní — nepožadujeme, aby C byl úplný, ani aby M byl v C hustý. Tyto vlastnosti prostoru C plynou jako důsledky naší definice, která je z logického hlediska přirozenější než standardní definice zúplnění.

Ukážeme, že (i) každé zúplnění prostoru M je úplné a že M je jeho hustý podprostor, (ii) zúplnění jsou jednoznačná až na izometrii a (iii) zúplnění existují. Začneme důkazem (i).

Tvrzení 21 *Nechť $C = \langle C, e \rangle$ je zúplnění prostoru $M = \langle M, d \rangle$. Potom je M hustý v C a metrický prostor C je úplný.*

Důkaz. První tvrzení plyne bezprostředně z Úlohy 19 a z částí 2 a 3 Definice 20. Ukážeme, že C je úplný. Nechť $(a_n) \subset C$ je Cauchyovská posloupnost v prostoru C . Protože M je hustý v C , můžeme podle Úlohy 19 vybrat body $b_n \in M$ tak, že $e(a_n, b_n) \leq n^{-1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Ukážeme, že (b_n) je Cauchyovská posloupnost v M . Nechť je dáno $\varepsilon > 0$. Pak $e(a_m, a_n) \leq \varepsilon$ pro všechny indexy $m, n \geq n_0$. Zvolíme index $n_1 \geq n_0$, že $e(a_n, b_n) \leq \varepsilon$ pro každé $n \geq n_1$. Pak pomocí TN dostaneme pro všechna $m, n \geq n_1$ odhad

$$d(b_m, b_n) = e(b_m, b_n) \leq e(b_m, a_m) + e(a_m, a_n) + e(a_n, b_n) \leq \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon$$

a vidíme, že (b_n) je Cauchyovská. Podle části 2 Definice 20 existuje bod $a \in C$, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a.$$

Ukážeme, že také $\lim a_n = a$. Nechť je dáno $\varepsilon > 0$. Zvolíme index $n_2 \geq n_1$, že $e(b_n, a) \leq \varepsilon$ pro každé $n \geq n_2$. Potom pro každé $n \geq n_2$ platí

$$e(a_n, a) \leq e(a_n, b_n) + e(b_n, a) \leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Tedy $\lim a_n = a$. □

K důkazu tvrzení (ii) budeme potřebovat lemma.

Lemma 22 *Nechť $\varepsilon > 0$, nechť $M = \langle M, d \rangle$ je metrický prostor a nechť pro $a, b, c \in M$ je $d(b, c) \leq \varepsilon$. Pak platí odhad*

$$|d(a, b) - d(a, c)| \leq \varepsilon.$$

Důkaz. Vskutku, z TN dostáváme nerovnosti $d(a, b) \leq d(a, c) + d(b, c)$ a $d(a, c) \leq d(a, b) + d(b, c)$. Ty jsou po řadě ekvivalentní nerovnostem

$$d(a, b) - d(a, c) \leq d(b, c) \leq \varepsilon \text{ a } d(a, b) - d(a, c) \geq -d(b, c) \geq -\varepsilon$$

a tyto nerovnosti jsou ekvivalentní uvedenému odhadu. $\square$

Tvrzení 23 *Nechť $C = \langle C, e \rangle$ a $C' = \langle C', e' \rangle$ jsou dvě zúplnění prostoru $M = \langle M, d \rangle$. Pak jsou metrické prostory C a C' izometrické.*

Důkaz. Definujeme zobrazení $F: C \rightarrow C'$ a ukážeme, že jde o izometrii mezi C a C' . Nechť $a \in C$ je libovolný bod. Protože M je hustý v C (Tvrzení 21), je $a = \lim b_n$ pro nějakou posloupnost $(b_n) \subset M$. Podle Úlohy 32 v přednášce 1 je (b_n) Cauchyovská posloupnost. Podle části 2 definice 20 máme $\lim b_n = a'$ pro nějaké $a' \in C'$. Zobrazení $F: C \rightarrow C'$ definujeme předpisem

$$F(a) := a'.$$

Ukážeme, že F nezávisí na volbě posloupnosti (b_n) . Nechť $(b'_n) \subset M$ je jiná posloupnost, pro kterou $\lim b'_n = a$. Z TN plyne

$$e'(b_n, b'_n) = d(b_n, b'_n) = e(b_n, b'_n) \leq e(b_n, a) + e(a, b'_n) \rightarrow 0 \text{ pro } n \rightarrow \infty.$$

Z Úlohy 24 tedy plyne, že v prostoru C' se $\lim b_n = \lim b'_n$.

Ukážeme, že F je bijekce a že zachovává vzdálenosti. Pro injektivitu F vezmeme $a_0, a_1 \in C$, $a_0 \neq a_1$, a posloupnosti $(b_n^i) \subset M$, že $\lim b_n^i = a_i$ pro $i = 0, 1$. Pak existuje $\varepsilon > 0$, že $d(b_n^0, b_n^1) \geq \varepsilon$ pro všechna dostatečně velká n . Odtud plyne, že $F(a_0) \neq F(a_1)$. Pro surjektivitu F potřebujeme, aby $F(a)$ nezáviselo na zvolené posloupnosti $(b_n) \subset M$ s vlastností $\lim b_n = a$ (Úloha 25). Vezmeme libovolný bod $a' \in C'$. Protože M je hustý v C' , je $a' = \lim b'_n$ pro nějakou posloupnost $(b'_n) \subset M$. Jelikož (b'_n) je Cauchyovská, z části 2 definice 20 plyne, že $\lim b'_n = a$ pro nějaké $a \in C$. Tedy $F(a) = a'$.

Nakonec, abychom dokázali, že F zachovává vzdálenosti, vezmeme dva body $a_0, a_1 \in C$ a posloupnosti $(b_n^i) \subset M$, že $\lim b_n^i = a_i$ pro $i = 0, 1$. Potom

$$\begin{aligned} e(a_0, a_1) &= \lim_{n \rightarrow \infty} e(b_n^0, b_n^1) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(b_n^0, b_n^1) = \lim_{n \rightarrow \infty} e'(b_n^0, b_n^1) = \\ &= e'(F(a_0), F(a_1)), \end{aligned}$$

a tedy $e(a_0, a_1) = e'(F(a_0), F(a_1))$. Dokažme podrobně první rovnost. Vezmeme $\varepsilon > 0$ a $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, aby $e(a_i, b_n^i) \leq \varepsilon$ pro $i = 0, 1$ a $n \geq n_0$. Pak pro každé $n \geq n_0$ skutečně platí, podle Lemmatu 22 a TN v E_1 , že

$$\begin{aligned} |e(a_0, a_1) - e(b_n^0, b_n^1)| &\leq |e(a_0, a_1) - e(b_n^0, a_1)| + |e(b_n^0, a_1) - e(b_n^0, b_n^1)| \\ &\leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon \end{aligned}$$

(uvažte trojúhelníky a_0, b_n^0, a_1 a b_n^0, b_n^1, a_1). Analogická rovnost $\lim e'(b_n^0, b_n^1) = e'(F(a_0), F(a_1))$ výše se dokáže stejným způsobem; pouze pracujeme v prostoru C' místo C . $\square$

Úloha 24 Dokažte podrobně, že $\lim b_n = \lim b'_n$ ($v C'$).

Úloha 25 Mohlo by se zdát, že lze vynechat důkaz, že hodnota $F(a) = a'$ nezávisí na volbě posloupnosti $S_a = (b_n) \subset M$ s $\lim b_n = a$. Prostě pro každé $a \in C$ vezmeme jednu pevnou posloupnost S_a . Ukažte, že tento přístup nefunguje v důkazu surjektivitě zobrazení F .

Nakonec dokážeme tvrzení (iii), že každý metrický prostor má zúplnění. Bez tohoto existenčního výsledku by Tvrzení 21 a 23 mohla být prázdná. Dvě posloupnosti (a_n) a (a'_n) v metrickém prostoru $M = \langle M, d \rangle$ nazveme *ekvivalentní*, a píšeme $(a_n) \sim (a'_n)$, jestliže $\lim d(a_n, a'_n) = 0$.

Úloha 26 Relace $\sim$ je relace ekvivalence.

Označme $\mathcal{C}(M)$ množinu všech Cauchyovských posloupností v M . Řekneme, že (*ekvivalenční*) blok $B \in \mathcal{C}(M)/\sim$ je *špatný*, jestliže neexistuje bod $b \in M$, že $\lim a_n = b$ pro nějakou (ekvivalentně, libovolnou) posloupnost $(a_n) \in B$.

Věta 27 (zúplnění existují) Pro každý metrický prostor $M = \langle M, d \rangle$ existuje jeho zúplnění $C = \langle C, e \rangle$.

Důkaz. Nechť $M = \langle M, d \rangle$ je metrický prostor a nechť

$$M' := \{B \in \mathcal{C}(M) / \sim : B \text{ je špatný blok}\}.$$

Pomocí konstrukce disjunktního sjednocení, připomenuté v Úloze 28, můžeme předpokládat, že $M \cap M' = \emptyset$. Položme

$$C := M \cup M';$$

je to disjunktní sjednocení. Nejprve definujeme zobrazení $e: C \times C \rightarrow \mathbb{R}$. Poté ukážeme, že $\langle C, e \rangle$ je metrický prostor. Nakonec ukážeme, že dvojice $\langle M, d \rangle$ a $\langle C, e \rangle$ má vlastnosti 1–3 z Definice 20.

Nechť $a, b \in C$. Pokud $a, b \in M$, definujeme $e(a, b) := d(a, b)$. Pokud a leží v M a $b = B \in M'$, vezmeme libovolnou posloupnost $(b_n) \in B$ a položíme

$$e(a, B) := \lim_{n \rightarrow \infty} d(a, b_n) \quad (\in \mathbb{R}).$$

Tato limita existuje podle Věty 16, protože posloupnost $(d(a, b_n)) \subset \mathbb{R}$ je Cauchyovská podle Lematu 22. Dále je snadné ukázat, že tato limita nezávisí na volbě posloupnosti (b_n) v B . Obdobně definujeme hodnoty $e(A, b)$ pro $A \in M'$ a $b \in M$. Pro $A, B \in M'$ a pro libovolné posloupnosti $(a_n) \in A$ a $(b_n) \in B$ položíme

$$e(A, B) := \lim_{n \rightarrow \infty} d(a_n, b_n) \quad (\in \mathbb{R}).$$

Existence této limity a její nezávislost na volbě posloupností (a_n) a (b_n) se zdůvodní stejně jako výše.

Ukážeme, že $\langle C, e \rangle$ je metrický prostor. Zřejmě e je nezáporná a symetrická funkce, protože d má tyto vlastnosti. Nechť $a, b \in C$. Nechť $a = b$. Pokud $a = b \in M$, pak $e(a, b) = d(a, b) = 0$, protože d je metrika. Pokud $a = A = B = b \in M'$, pak $e(a, b) = 0$, protože můžeme vzít dvakrát tutéž posloupnost $(a_n) = (b_n) \in A = B$ a spočítat limitu $e(a, b) = \lim d(a_n, b_n) = \lim d(a_n, a_n) = 0$. Nechť $e(a, b) = 0$. Pokud $a, b \in M$, pak $a = b$, protože d je metrika. Nechť $a \in M$, $b = B \in M'$ a $(b_n) \in B$. Pak $e(a, B) = \lim d(a, b_n) = 0$ ve skutečnosti nelze, protože bychom měli $\lim b_n = a$ (v M) a B by nebyl špatný blok; stejně tak, pokud $a = A \in M'$ a $b \in M$. Nechť $a = A, b = B \in M'$ a nechť $(a_n) \in A$ a $(b_n) \in B$. Pak $e(A, B) = \lim d(a_n, b_n) = 0$ znamená, že $(a_n) \sim (b_n)$ a $A = B$. Ukážeme, že pro e platí TN. To plyne snadno ze tří faktů: z definice e , z toho, že d splňuje TN a z toho, že neostré

reálné nerovnosti se zachovávají v limitách (jestliže $x_n \leq y_n$ pro každé n , pak $\lim x_n \leq \lim y_n$, pokud tyto limity existují). Takže $\langle C, e \rangle$ je metrický prostor.

Ukážeme, že $C = \langle C, e \rangle$ je zúplněním M podle Definice 20. Z definice e plyne, že M je podprostorem C . Nechť $(a_n) \in \mathcal{C}(M)$. Pokud $\lim a_n = b$ (v M) pro nějaké $b \in M$, jsme hotovi. Jinak $A = [(a_n)]_\sim \in M'$. Pak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e(A, a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} d(a_m, a_n) = 0,$$

protože (a_n) je Cauchyovská posloupnost v M . Tedy $\lim a_n = A$ (v C). Nakonec, pro důkaz vlastnosti 3 v Definici 20 vezmeme špatný blok $A = [(a_n)]_\sim \in M'$ a odstraníme jej z C . Pak však posloupnost (a_n) ($\in \mathcal{C}(M)$) nemá limitu v $C \setminus \{A\}$, protože v C má limitu A a vlastnost 2 ztrácíme. Důkaz je hotov. $\square$

Úloha 28 *Připomeňme, že disjunkttní sjednocení dvou množin X a Y je množina*

$$(\{0\} \times X) \cup (\{1\} \times Y).$$

Vysvětlete, proč můžeme v předchozím důkazu s použitím této konstrukce předpokládat, že $M \cap M' = \emptyset$. Co by se pokazilo, kdyby $M \cap M' \neq \emptyset$?

Topologické prostory

Topologické prostory, zkráceně topologie, jsou zobecněním metrických prostorů na hypergrafy (systémy podmnožin dané množiny), které mají všechny vlastnosti otevřených množin. Topologie zavedl německý matematik *Felix Hausdorff* (1868–1942). Připomeňme, že pro libovolnou množinu X ,

$$\mathcal{P}(x) := \{Y : Y \subset X\}$$

je *potenční množina* X , tj. množina všech podmnožin množiny X .

Definice 29 (topologie) *Dvojice $T = \langle T, \tau \rangle$ je topologie, jestliže $T \neq \emptyset$ je množina, $\tau \subset \mathcal{P}(T)$ je hypergraf na T a platí následující tři podmínky.*

1. $\emptyset, T \in \tau$.
2. Jestliže $A, B \in \tau$, pak $A \cap B \in \tau$.
3. Jestliže $A_i \in \tau$ pro každé $i \in I$, pak $\bigcup_{i \in I} A_i \in \tau$.

Prvky množiny τ jsou *otevřené množiny* topologie. Jejich doplňky $T \setminus A$, $A \in \tau$, jsou *uzavřené množiny* topologie. Podle Tvzení 15 z přednášky 1 je pro každý metrický prostor $M = \langle M, d \rangle$ dvojice

$$\langle M, \text{otevřené množiny v } M \rangle$$

topologií. Je to *metrická topologie*. Z definic plyne, že uzavřené množiny v metrických prostorech a v metrických topologiích splývají. Dalšími příklady topologií jsou *diskrétní topologie* $\langle T, \mathcal{P}(T) \rangle$ a *indiskrétní topologie* $\langle T, \{\emptyset, T\} \rangle$.

V metrických topologiích jsou body uzavřené, jak snadno dokážete ve dvou následujících úlohách.

Úloha 30 Každý bod $\{b\}$, $b \in M$, v metrické topologii je uzavřený. Dokažte to z definice uzavřených množin jako doplňků otevřených množin.

Úloha 31 Totéž dokažte pomocí charakterizace uzavřených množin v metrických prostorech pomocí limit posloupností (Tvzení 28 v přednášce 1).

Úloha 32 Uveďte příklad takové topologie $\langle T, \tau \rangle$, že její body $\{b\}$, $b \in T$, nejsou uzavřené množiny.

V následující větě identifikujeme vlastnost, která odlišuje metrické topologie od obecných topologií.

Věta 33 (normalita metrických topologií) Nechť $M = \langle M, d \rangle$ je metrický prostor. Metrická topologie na M je normální: pro libovolné dvě disjunktí uzavřené množiny $U, V \subset M$ existují takové dvě disjunktí otevřené množiny $A, B \subset M$, že

$$U \subset A \text{ a } V \subset B.$$

K důkazu potřebujeme následující lemma.

Lemma 34 Předpokládejme, že $B_1 := B(b_1, r)$ a $B_2 := B(b_2, s)$ jsou dvě koule v metrickém prostoru $\langle M, d \rangle$ a že

$$b_2 \notin B_1 \text{ a } b_1 \notin B_2.$$

Potom $B(b_1, r/2) \cap B(b_2, s/2) = \emptyset$.

Důkaz. Máme $b_1 \neq b_2$ a $t := d(b_1, b_2) > 0$. Zřejmě platí $0 < r, s \leq t$. Pro spor předpokládejme, že $b \in B(b_1, r/2) \cap B(b_2, s/2)$. Trojúhelníková nerovnost dává spor:

$$t = d(b_1, b_2) \leq d(b_1, b) + d(b, b_2) < r/2 + s/2 \leq t/2 + t/2 = t.$$

□

Důkaz Věty 33. Jelikož $U \subset M \setminus V$ a tento doplněk je otevřená množina, můžeme pro každé $u \in U$ vzít kouli B_u se středem u tak, že $B_u \cap V = \emptyset$. Podobně pro každé $v \in V$ existuje koule B_v se středem v tak, že $B_v \cap U = \emptyset$. Necht' B'_u a B'_v jsou tyto koule s poloměry zmenšenými na polovinu. Podle předchozího lemmatu platí $B'_u \cap B'_v = \emptyset$ pro každé $u \in U$ a každé $v \in V$. Z toho (podle Úlohy 35) plyne, že

$$A := \bigcup_{u \in U} B'_u \text{ a } B := \bigcup_{v \in V} B'_v$$

jsou požadované otevřené množiny.

□

Úloha 35 *Ukažte, že množiny A a B jsou otevřené, mají prázdný průnik, $U \subset A$ a $V \subset B$.*

Topologie $\langle T, \tau \rangle$ se nazývá *Hausdorffova*, také *prostor typu T_2* , jestliže pro libovolné dva body $a, b \in T$, $a \neq b$, existují takové otevřené množiny $A, B \in \tau$, že

$$a \in A, b \in B \text{ a } A \cap B = \emptyset.$$

Z Úloh 30 a 31 a z Věty 33 vidíme, že každá metrická topologie je Hausdorffova. Tato vlastnost metrické topologie je zásadní pro důkaz jednoznačnosti limit posloupností.

Úloha 36 *Uveďte jednoduchý přímý důkaz (bez použití Věty 33), že metrické topologie jsou Hausdorffovy.*

Topologie $T = \langle T, \tau \rangle$ je *normální*, také *prostor typu T_4* , jestliže pro každé dvě disjunktní uzavřené množiny U a V v T existují takové otevřené množiny A a B v T , že

$$U \subset A, V \subset B \text{ a } A \cap B = \emptyset.$$

Podle Věty 33 je každá metrická topologie normální.

Úloha 37 Uvažujte takový hypergraf $T = \langle \mathbb{N}, \tau \rangle$, že $A \subset \mathbb{N}$ je v τ právě tehdy, když $A = \emptyset$ nebo $A = \mathbb{N} \setminus X$ pro nějakou konečnou množinu $X \subset \mathbb{N}$. Ukažte, že T je nehausdorffovská a nenormální topologie.

Normované vektorové prostory a Hilbertovy prostory

Topologie jsou obecnější struktury než metrické prostory. Nyní si připomeneme některé struktury, které jsou naopak speciálnější. $\mathbb{R}^n$ je vždy příkladem. Předpokládáme, že čtenář zná vektorové prostory nad tělesy; v našem případě je příslušným tělesem $\mathbb{R}$. Stručně je zopakujeme. Vektorový prostor V nad tělesem F je čtveřice

$$V = \langle V, 0_V, +, \{\lambda_r : r \in F\} \rangle$$

sestavující ze základní množiny $V \neq \emptyset$ takzvaných vektorů, z nulového vektoru $0_V \in V$, z operace sčítání $+: V \times V \rightarrow V$ a z množiny unárních operací $\lambda_r: V \rightarrow V$. Operace λ_r je násobení skalárem r . Hodnoty $\lambda_r(v)$ pro $v \in V$ a $r \in F$ stručně značíme rv ($\in V$). Předpokládáme, že čtenář zná axiomy/vlastnosti vektorových prostorů. Vektorových prostorů je mnoho, ale pro nás je důležitý příklad $V = \mathbb{R}^n$ s $0_V = \langle 0, \dots, 0 \rangle$, se sčítáním po složkách a s násobením skaláry z $\mathbb{R}$ po složkách.

Definice 38 (normované prostory) Normou na vektorovém prostoru V nad tělesem $\mathbb{R}$ rozumíme zobrazení $\|\cdot\|: V \rightarrow \mathbb{R}$ s následujícími třemi vlastnostmi ($u, v \in V$ a $a \in \mathbb{R}$).

1. Vždy $\|u\| \geq 0$ a $\|u\| = 0$ právě tehdy, když $u = 0_V$.
2. Vždy $\|au\| = |a| \cdot \|u\|$.
3. Vždy $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$.

Dvojice $\langle V, \|\cdot\| \rangle$ je normovaný vektorový prostor.

Třetí vlastnost je TN v nové podobě. Pro libovolný normovaný vektorový prostor $\langle V, \|\cdot\| \rangle$ definujeme funkci $d_V: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ vztahem

$$d_V(u, v) := \|u - v\|.$$

Úloha 39 Co je operace $-$, která se objevuje v definici d_V ? Jak souvisí se sčítáním?

Normované vektorové prostory dává do souvislosti s metrickými prostory následující cvičení.

Úloha 40 Ukažte, že pro každý normovaný vektorový prostor $\langle V, \|\cdot\| \rangle$ je dvojice

$$\langle V, d_V(u, v) \rangle = \langle V, \|u - v\| \rangle$$

metrický prostor.

Je-li metrický prostor $\langle V, d_V \rangle$ úplný, řekneme, že normovaný vektorový prostor $\langle V, \|\cdot\| \rangle$ je *Banachův prostor*.

Čtenář pravděpodobně zná pojem *vnitřního součinu* (nazývaného také *skalární součin*) na vektorovém prostoru V . Je to funkce

$$\text{sp}: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

která splňuje tři podmínky (používáme značení $\text{sp}(u, v)$ místo běžnějšího $\langle u, v \rangle$, abychom se vyhnuli konfliktu se značením pro n -tice). Vlastnosti skalárního součinu jsou následující.

1. sp je bilineární zobrazení: $\text{sp}(u, av + bv') = a\text{sp}(u, v) + b\text{sp}(u, v')$ pro všechna $u, v, v' \in V$ a $a, b \in \mathbb{R}$. Totéž platí i v první proměnné u .
2. sp je symetrický: $\text{sp}(u, v) = \text{sp}(v, u)$ pro všechna $u, v \in V$.
3. sp je kladně definitní: $\text{sp}(u, u) \geq 0$ pro všechna $u \in V$, přičemž rovnost nastává pouze pro $u = 0_V$.

Například vektorový prostor $\mathbb{R}^n$ má skalární součin

$$\text{sp}(\bar{u}, \bar{v}) := \sum_{i=1}^n u_i v_i.$$

Úloha 41 Ukažte, že jde o skalární součin.

Na rozdíl od metrik a norem mohou mít skalární součiny záporné hodnoty. Jak jsme slíbili na přednášce 1, zobecníme Cauchyho–Schwarzovu nerovnost na vektorové prostory se skalárním součinem.

Věta 42 (CSN pro skalární součiny) *Nechť $\text{sp}(u, v)$ je skalární součin na vektorovém prostoru V . Potom*

$$\text{sp}(u, v) \leq \sqrt{\text{sp}(u, u) \cdot \text{sp}(v, v)} \quad (\iff |\text{sp}(u, v)| \leq \sqrt{\text{sp}(u, u) \cdot \text{sp}(v, v)})$$

pro všechny vektory $u, v \in V$. Navíc nerovnost přejde v rovnost právě tehdy, když jsou vektory u a v lineárně závislé, tj. jeden je skalárním násobkem druhého.

Důkaz. Necht' $u, v \in V$ jsou libovolné vektory. Pokud $v = 0_V$, CS nerovnost platí triviálně jako rovnost $0 = 0$. Necht' $v \neq 0_V$ a $\alpha := \text{sp}(u, v)/\text{sp}(v, v)$ ($\in \mathbb{R}$). Pak platí

$$\begin{aligned} 0 &\leq \text{sp}(u - \alpha v, u - \alpha v) \\ &= \text{sp}(u, u) - 2\alpha \text{sp}(u, v) + \alpha^2 \text{sp}(v, v) \\ &= \text{sp}(u, u) - \text{sp}(u, v)^2 / \text{sp}(v, v). \end{aligned}$$

První nerovnost plyne z kladné definitnosti $\text{sp}(\cdot, \cdot)$, druhá rovnost plyne z bilinearity a symetrie $\text{sp}(\cdot, \cdot)$ a poslední, třetí rovnost je dána volbou skaláru α . Získaná nerovnost

$$0 \leq \text{sp}(u, u) - \text{sp}(u, v)^2 / \text{sp}(v, v)$$

je ekvivalentní s

$$\text{sp}(u, v)^2 \leq \text{sp}(u, u) \cdot \text{sp}(v, v) \iff |\text{sp}(u, v)| \leq \sqrt{\text{sp}(u, u) \cdot \text{sp}(v, v)}.$$

S ohledem na Úlohu 43 jsme hotovi. Druhé tvrzení je zřejmé: nerovnost platí jako rovnost právě tehdy, když $u - \alpha v = 0_V$. $\square$

Úloha 43 *Ukažte, že dvě verze CSN pro skalární součiny, s absolutní hodnotou i bez ní, jsou ekvivalentní.*

Pro libovolný vektorový prostor V se skalárním součinem $\text{sp}(u, v)$ definujeme funkci $\|\cdot\|_V: V \rightarrow \mathbb{R}$ vztahem

$$\|u\|_V := \sqrt{\text{sp}(u, u)}.$$

Vektorové prostory se skalárním součinem jsou dány do souvislosti s normovanými vektorovými prostory a tedy i s metrickými prostory v následující úloze.

Úloha 44 *Ukažte, že pro každý vektorový prostor V se skalárním součinem je dvojice $\langle V, \|\cdot\|_V \rangle$ normovaný vektorový prostor.*

Takže pokud V je vektorový prostor se skalárním součinem $\text{sp}(u, v)$, pak dvojice

$$\langle V, d_V(u, v) \rangle := \langle V, \sqrt{\text{sp}(u - v, u - v)} \rangle$$

je metrický prostor.

Připomeneme Hilbertovy prostory. Jsou pojmenované po *Davidu Hilbertovi (1862–1943)*, který byl mimořádně všestranným, tvůrčím a vlivným matematikem své doby.

Definice 45 (Hilbertovy prostory) *Uvažujme vektorový prostor V , který je vybaven skalárním součinem $\text{sp}(u, v)$. Jestliže je metrický prostor*

$$\langle V, d_V(u, v) \rangle = \langle V, \sqrt{\text{sp}(u - v, u - v)} \rangle$$

úplný, nazýváme dvojici $\langle V, \text{sp}(u, v) \rangle$ Hilbertův prostor.

Abychom to shrnuli, popsali jsme hierarchii matematických struktur:

$$\mathbb{R}^n \subset \text{Hilbertovy prostory} \subset \text{normované vektorové prostory} \subset \\ \subset \text{metrické prostory} \subset \text{topologie}.$$

Kompaktní množiny a kompaktní prostory

Zavedeme druhou důležitou třídu metrických prostorů: kompaktní prostory. Připomeňme, že posloupnost (b_n) je *podposloupností* posloupnosti (a_n) , pokud existuje taková posloupnost indexů $m_1 < m_2 < \dots$, že

$$b_n = a_{m_n} \text{ pro každé } n \in \mathbb{N}.$$

Definice 46 (kompaktnost) *Množina $X \subset M$ v metrickém prostoru $\langle M, d \rangle$ je kompaktní, jestliže každá posloupnost $(a_n) \subset X$ má podposloupnost (a_{m_n}) , která má limitu*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{m_n} \in X.$$

Je-li množina M kompaktní, řekneme, že prostor M je kompaktní.

Úloha 47 *Dokažte, že diskrétní metrický prostor $\langle M, d \rangle$ je kompaktní právě tehdy, když je množina M konečná.*