

Matematická analýza 2 (MA2) – Přednáška 1

Martin Klazar

1. října 2026

Úplné texty přednášek jsou na <https://kam.mff.cuni.cz/~klazar/MAII26cz.html>
a předpokládá se, že se z nich studentky a studenti budou učit; slajdy jsou jen osnovy.

- 1 Přehled předmětu
- 2 Metrické prostory
- 3 Eukleidovské metrické prostory
- 4 Operace s metrickými prostory
- 5 Otevřené a uzavřené množiny
- 6 Spojitá zobrazení
- 7 Úplné prostory

V tomto pokračování MA1 budeme zkoumat funkce tvaru

$$f: X \rightarrow \mathbb{R}, \text{ kde } X \subset \mathbb{R}^n.$$

Předmět MA2 má tři části:

- Metrické prostory: úplnost, kompaktnost, souvislost ($\mathbb{R}^n$ je metrický prostor) – asi 3 př.
- Diferenciální počet funkcí více proměnných – asi 5 př.
- Integrální počet funkcí více proměnných – asi 5 př.

Zkouška: viz <https://kam.mff.cuni.cz/~klazar/MAII26cz.html>

První část. Metrické prostory

Metrické prostory patří mezi nejběžnější a nejužitečnější struktury v matematice i informatice. Zavedl je francouzský matematik *Maurice R. Fréchet* (1878–1973).

Definice (metrické prostory)

Metrický prostor je dvojice $\langle M, d \rangle$, kde $M \neq \emptyset$ a funkce $d: M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ (takzvaná *metrika* či *vzdálenost*) splňuje pro všechna $x, y, z \in M$, že

- ① $d(x, y) \geq 0$ a $d(x, y) = 0 \iff x = y$;
- ② (symetrie) $d(x, y) = d(y, x)$ a
- ③ (trojúhelníková nerovnost) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

V MA1 jsme už pracovali s metrickým prostorem $\langle \mathbb{R}, |x - y| \rangle$. Další příklady: *diskrétní prostory* $\langle M, d \rangle$, kde $d(x, y) = 1$ pro $x \neq y$ a $d(x, x) = 0$.

Každou definici třídy matematických struktur by měla doprovázet definice jejich izomorfismů. Pro metrické prostory jsou to takzvané izometrie.

Definice (izometrie)

Dva metrické prostory $\langle M, d \rangle$ a $\langle N, e \rangle$ jsou *izometrické*, jestliže existuje taková bijekce $F: M \rightarrow N$, že

$$d(x, y) = e(F(x), F(y)) \text{ pro všechna } x, y \in M.$$

F pak je *izometrie* prostorů M a N .

Všimněte si, že F^{-1} je také izometrie. Příklad: prostory $E_m \times E_n$ a E_{m+n} jsou izometrické; součin prostorů $\times$ a eukleidovské prostory E_n zavedeme později.

Eukleidovská metrika e_n na $\mathbb{R}^n$

Nechť $n \in \mathbb{N}$ ($= \{1, 2, \dots\}$). Eukleidovský (metrický) prostor E_n je dvojice $\langle \mathbb{R}^n, e_n \rangle$, kde $e_n: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definujeme vztahem

$$e_n(\langle x_1, \dots, x_n \rangle, \langle y_1, \dots, y_n \rangle) := \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}.$$

Pro $n = 1$ je $e_1(x, y) = |x - y|$ známá metrika na reálné ose. Pro $n = 2$ je

$$e_2(\bar{x}, \bar{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$

známá eukleidovská vzdálenost v rovině. Je zřejmé, že $e_n(\bar{x}, \bar{y}) \geq 0$, s rovností jen pro $\bar{x} = \bar{y}$, a že $e_n(\bar{x}, \bar{y}) = e_n(\bar{y}, \bar{x})$. Dokážeme, že pro e_n platí trojúhelníková nerovnost.

Cauchy–Schwarzova nerovnost (CSN)

Začneme jinou nerovností, *Cauchy–Schwarzovou nerovností*, která se připisuje francouzskému matematikovi *Augustinu-Louisi Cauchy*mu (1789–1857) (několik let žil v Praze) a německému matematikovi *Hermannu Schwarzovi* (1843–1921).

Věta (CSN)

Pro libovolná reálná čísla x_i, y_i ($i = 1, \dots, n$) platí, že

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2 \cdot \sum_{i=1}^n y_i^2}.$$

Náčrt důkazu: převedeme ji do ekvivalentního tvaru $\sum_j z_j^2 \geq 0$ a pak použijeme, že pro každé $z \in \mathbb{R}$ je $z^2 \geq 0$. CSN má obecnou verzi ve vektorových prostorech se skalárním součinem.

Trojúhelníková nerovnost pro e_n

Trojúhelníkovou nerovnost pro funkci e_n odvodíme z Cauchy–Schwarzovy nerovnosti.

Důsledek

Pro libovolné tři n -tice $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in \mathbb{R}^n$ je

$$e_n(\bar{x}, \bar{y}) \leq e_n(\bar{x}, \bar{z}) + e_n(\bar{z}, \bar{y}).$$

Náčrt důkazu: nerovnost přepíšeme pomocí proměnných $u_i = x_i - z_i$ a $v_i = z_i - y_i$ jako $\sqrt{\sum_{i=1}^n (u_i + v_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n u_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n v_i^2}$, obě strany umocníme na druhou a použijeme CSN.

Tedy $\langle \mathbb{R}^n, e_n \rangle$ je metrický prostor. Označíme ho jako E_n a nazveme ho n -rozměrným *eukleidovským prostorem*. Obecněji budeme každému podprostoru (podprostory definujeme později) prostoru E_n říkat *eukleidovský prostor*.

Další metriky na $\mathbb{R}^n$

Na $\mathbb{R}^n$ lze definovat mnoho jiných metrik. Například

- maximovou metriku

$$e_{n, \max}(\bar{x}, \bar{y}) := \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|,$$

- součtovou metriku

$$e_{n, \text{sum}}(\bar{x}, \bar{y}) := \sum_{i=1}^n |x_i - y_i| \text{ a}$$

- L_p metriky (pro reálné $p \geq 1$)

$$e_{n, p}(\bar{x}, \bar{y}) := \left(\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^p \right)^{1/p}.$$

Důkazy trojúhelníkové nerovnosti pro první dvě funkce nechávám jako cvičení. Důkaz trojúhelníkové nerovnosti pro L_p metriky je náročnější. Poznamenejme, že $e_n = e_{n,2}$.

Zavedeme dvě operace, kterými lze ze stávajících metrických prostorů vytvářet nové. První operací je podprostor. Nechť $\langle M, d \rangle$ je metrický prostor a $\emptyset \neq A \subset M$. Pak *podprostor prostoru M (indukovaný množinou A)* definujeme jako

$$M|A := \langle A, d' \rangle, \text{ kde } d': A \times A \rightarrow \mathbb{R} \text{ a } d'(x, y) := d(x, y).$$

Vzdálenost d tedy pouze zúžíme na $A \times A$. Snadno se ověří, že $M|A$ je metrický prostor.

Jak jsme už zmínili, každý podprostor prostoru E_n budeme nazývat *eukleidovským (metrickým) prostorem*.

Druhou operací na metrických prostorech je součin dvou prostorů. Pro metrické prostory $\langle M, d \rangle$ a $\langle N, e \rangle$ definujeme funkci $d': M \times N \rightarrow \mathbb{R}$ předpisem

$$d'(\langle a, b \rangle, \langle a', b' \rangle) := \sqrt{d(a, a')^2 + e(b, b')^2}.$$

Metrický prostor $\langle M \times N, d' \rangle$ nazveme *součinem prostorů M a N* .

Tvrzení

Součin dvou metrických prostorů splňuje trojúhelníkovou nerovnost a je metrickým prostorem.

Náčrt důkazu: použijeme trojúhelníkovou nerovnost v E_2 a to, že d a e jsou metriky.

Tvrzení

Součin prostorů $E_m \times E_n$ je izometrický s prostorem E_{m+n} .

Náčrt důkazu: izometrie je dána zřetězením souřadnic.

Koule, otevřené a uzavřené množiny

V libovolném metrickém prostoru zavedeme dvě důležité třídy podmnožin: otevřené a uzavřené množiny. Nechť $\langle M, d \rangle$ je metrický prostor, $b \in M$ a nechť $r > 0$ je reálné číslo. Množina

$$B_M(b, r) = B(b, r) := \{a \in M : d(a, b) < r\}$$

je (otevřená) koule se středem b a poloměrem r . Patrně $b \in B(b, r)$. Uzavřené koule jsou množiny $\overline{B}_M(b, r) = \overline{B}(b, r) := \{a \in M : d(a, b) \leq r\}$.

Definice (otevřené a uzavřené množiny)

Množina $X \subset M$ je *otevřená*, jestliže $\forall b \in X \exists r > 0 : B(b, r) \subset X$.

Množina $X \subset M$ je *uzavřená* jestliže $M \setminus X$ je otevřená.

Jako cvičení dokažte, že každá koule je otevřená množina a že každá uzavřená koule je uzavřená množina.

Vlastnosti otevřených a uzavřených množin

Tvrzení

Nechť $\langle M, d \rangle$ je metrický prostor. Otevřené množiny v M mají následující vlastnosti.

- $\emptyset$ a M jsou otevřené.
- Konečné průniky otevřených množin jsou otevřené.
- Libovolná sjednocení otevřených množin jsou otevřená. Prázdné sjednocení definujeme jako $\emptyset$.

Tvrzení

Nechť $\langle M, d \rangle$ je metrický prostor. Uzavřené množiny v M mají následující vlastnosti.

- $\emptyset$ a M jsou uzavřené.
- Konečná sjednocení uzavřených množin jsou uzavřená.
- Libovolné průniky uzavřených množin jsou uzavřené. Prázdný průnik definujeme jako M .

Náčrt důkazu: definice a de Morganovy identity ($M \setminus \bigcup_j A_j = \bigcap_j (M \setminus A_j)$).

Spojité zobrazení mezi metrickými prostory

Uvedeme klasickou ε - δ definici spojitosti.

Definice (spojitost v bodě)

Nechť $\langle M, d \rangle$ a $\langle N, e \rangle$ jsou metrické prostory, $b \in X \subset M$ a nechť $f: X \rightarrow N$. Řekneme, že zobrazení f je *spojité v bodě b* , jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$, že

$$f[B_M(b, \delta)] \subset B_N(f(b), \varepsilon).$$

Naše obrazy množin zobrazeními zobecňují standardní obrazy: je-li $g: A \rightarrow B$ funkce a C je *libovolná* množina, pak $g[C] := \{g(x) : x \in A \cap C\} (\subset B)$. Standardně se (zbytečně) požaduje, aby $C \subset A$. Zde je to nepohodlné, protože obecně $B_M(b, \delta) \not\subset X$. Jelikož f můžeme chápat jako zobrazení z podprostoru $M|X$, můžeme se omezit na všude definovaná zobrazení.

Definice (spojité zobrazení)

Zobrazení $f: M \rightarrow N$ mezi metrickými prostory je *spojité*, jestliže je spojitý v každém bodě prostoru M .

Spojitosť vyjádřená vzory otevřených množin a Heineho definicí

Uvedeme ještě dvě ekvivalentní formulace spojitosti.

Tvrzení

Zobrazení $f: M \rightarrow N$ mezi metrickými prostory je spojitě právě tehdy, když $f^{-1}[B]$ je otevřená množina v M pro každou otevřenou množinu B v N .

Náčrt důkazu: koule jsou otevřené množiny a otevřené množiny jsou definované pomocí koulí. Jako cvičení ukažte, že ekvivalence platí také s uzavřenými množinami. Je-li $g: A \rightarrow B$ a C je libovolná množina, pak $g^{-1}[C] := \{x \in A: g(x) \in C\} (\subset A)$ je *vzor množiny C zobrazením g* .

Věta (Heineho definice)

Zobrazení $f: M \rightarrow N$ mezi metrickými prostory je spojitě v bodě $b \in M$ právě tehdy, když $\lim f(a_n) = f(b)$ pro každou takovou posloupnost $(a_n) \subset M$, že $\lim a_n = b$.

Náčrt důkazu: stejně jako v MA1. Věta souvisí s německým matematikem *Eduardem Heinem* (1821–1881). Limity posloupností v metrických prostorech definujeme v okamžení.

Limity posloupností a Cauchyovské posloupnosti

Nechť $M = \langle M, d \rangle$ je metrický prostor, $b \in M$ a necht' $(a_n) \subset M$ je posloupnost bodů v M . Jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$, že pro každý index $n \geq n_0$ je

$$d(a_n, b) \leq \varepsilon,$$

píšeme $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = b$ nebo $\lim a_n = b$ nebo $a_n \rightarrow b$ a řekneme, že *posloupnost (a_n) má limitu b* . Jako cvičení ukažte, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = b \iff \lim_{n \rightarrow \infty} d(a_n, b) = 0$$

(jde o dvě různé limity) a že limita je určena jednoznačně. Řekneme, že posloupnost (a_n) je *Cauchyovská*, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$, že pro každé dva indexy $m, n \geq n_0$ je

$$d(a_m, a_n) \leq \varepsilon.$$

Uzavřenost množin vyjádřená limitami

Dokážeme následující tvrzení.

Tvrzení

Množina $X \subset M$ v metrickém prostoru je uzavřená $\iff$ pro každou posloupnost $(a_n) \subset X$ mající limitu tato limita leží v X .

Důkaz.

Předpokládejme, že X je uzavřená, $(a_n) \subset X$ má limitu $\lim a_n = b$, ale $b \in M \setminus X$. Protože poslední množina je otevřená, existuje $r > 0$, že $B(b, r) \subset M \setminus X$. Z definice limity plyne, že $a_n \in B(b, r)$ a tedy i $a_n \notin X$ pro všechna dostatečně velká n , což je spor. Tedy $b \in X$.

Předpokládejme, že X není uzavřená. Pak doplněk $M \setminus X$ není otevřený, což znamená, že existuje takový bod $b \in M \setminus X$, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $B(b, 1/n) \cap X \neq \emptyset$. Pomocí *axiomu výběru* zvolíme pro každé n nějaký bod $a_n \in B(b, 1/n) \cap X$. Takto získáme takovou posloupnost (a_n) , že $(a_n) \subset X$ a $\lim a_n = b$. Avšak $b \notin X$. □

Zavedeme první ze tří důležitých tříd metrických prostorů: úplné prostory. Další dvě třídy jsou kompaktní prostory a souvislé prostory.

Definice (úplnost)

Množina $X \subset M$ v metrickém prostoru je *úplná*, jestliže každá Cauchyovská posloupnost obsažená v X má limitu ležící v X . Prostor M je *úplný*, jestliže množina M je úplná.

Příklad: $(\mathbb{R}, |x - y|)$ je úplný metrický prostor. Ukažte jako cvičení, že diskrétní prostory (definované na začátku) jsou úplné.

Tvrzení

Je-li M úplný metrický prostor a $X \subset M$, pak množina X je úplná $\iff X$ je uzavřená.

Náčrt důkazu: plyne to snadno z předchozího tvrzení.

Dnes:

- Metrické prostory a izometrie
- Trojúhelníková nerovnost pro eukleidovskou metriku pomocí CSN
- Podprostory a součiny
- Koule, otevřené a uzavřené množiny
- Spojitá zobrazení
- Limity posloupností a Cauchyovské posloupnosti
- Úplné množiny a prostory