

MA2 – přednáška 1

Martin Klazar

1. října, 2026

Abstrakt

Definujeme metrické prostory a izometrie mezi nimi. Zavedeme podprostory a součiny metrických prostorů. Dokážeme trojúhelníkovou nerovnost pro eukleidovskou metriku na $\mathbb{R}^n$. Zavedeme koule, otevřené množiny a uzavřené množiny. Spojitá zobrazení charakterizujeme pomocí vzorů otevřených množin a také Heineho definicí. Definujeme úplné množiny v metrických prostorech a dokážeme, že v úplném prostoru je množina úplná právě tehdy, když je uzavřená.

V předmětu *Matematická analýza 2* rozšíříme jak diferenciální, tak integrální počet funkcí jedné proměnné, jimiž se zabývá *Matematická analýza 1*, na funkce více proměnných. Hlavní objekty v *MA2* budou funkce typu

$$f: M \rightarrow \mathbb{R} \text{ s } M \subset \mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n \text{ kopií } \mathbb{R}} \text{ a } n \in \mathbb{N} (= \{1, 2, \dots\}).$$

Vysvětlíme použité značení. *Funkce* neboli *zobrazení* $g: X \rightarrow Y$, kde X a Y jsou množiny, je každá množina

$$g \subset X \times Y \quad (= \{\langle x, y \rangle: x \in X, y \in Y\}),$$

pro níž pro každé $x \in X$ existuje *jediné* $y \in Y$, označované jako $g(x)$, že dvojice $\langle x, y \rangle \in g$. Symbolem $\mathbb{R}$ značíme *úplné uspořádané těleso reálných čísel*. Jeho úplnost znamená, že každá neprázdná a shora omezená množina reálných čísel má ve standardním lineárním uspořádání $\langle \mathbb{R}, < \rangle$ supremum. Z toho plyne, že každá Cauchyovská posloupnost $(a_n) \subset \mathbb{R}$ má (konečnou) limitu $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \in \mathbb{R}$. Symbol $\mathbb{N}$ označuje množinu přirozených čísel.

Abychom mohli pracovat s těmito funkcemi f , nejprve musíme prozkoumat strukturu a vlastnosti množiny/prostoru $\mathbb{R}^n$. Brzy uvidíme, že $\mathbb{R}^n$ je přirozeným způsobem metrický prostor; později zmíníme další třídy struktur, jejichž příkladem je $\mathbb{R}^n$. Tento předmět bude mít tři části.

- Část 1 (cca 3 př.) Metrické prostory: úplné, kompaktní a souvislé. Dále uvedeme definice topologických prostorů, normovaných vektorových prostorů a Hilbertových prostorů. $\mathbb{R}^n$ je příkladem každé z těchto struktur.
- Část 2 (cca 5 př.) Diferenciální počet funkcí více proměnných
- Část 3 (cca 5 př.) Integrovaný počet funkcí více proměnných

K úlohám. V textech přednášek bude průběžně zařazeno mnoho úloh. Některé z nich se budou řešit na cvičeních. Cvičící je také mohou použít jako domácí úkoly. Jejich řešením čtenář lépe porozumí probíraným tématům.

Část 1. Metrické prostory

Předmět začneme úvodem do teorie metrických prostorů. Tato matematická struktura, s mnoha použitými v informatice, byla zavedena francouzským matematikem *Mauricem R. Fréchetem (1878–1973)*.

Metrické prostory, zejména eukleidovské

V *metrickém prostoru* $M = \langle M, d \rangle$ je¹ první složka M neprázdná množina a $d: M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ je funkce, které říkáme *vzdálenost* nebo *metrika*. Požaduje se, aby d měla tři vlastnosti ($x, y, z \in M$).

1. Vždy $d(x, y) \geq 0$ a $d(x, y) = 0$ právě tehdy, když $x = y$.
2. (symetrie) Vždy $d(x, y) = d(y, x)$.
3. (trojúhelníková nerovnost, zkracujeme jako TN) Vždy

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y).$$

¹Zápis $M = \langle M, d \rangle$ znamená, že symbolem M označujeme jak celou dvojici, tedy metrický prostor, tak nosnou množinu.

V *MA1*, jsme pracovali s metrickým prostorem $\langle \mathbb{R}, |x - y| \rangle$. Příkladem metrických prostorů jsou také *diskrétní prostory* $\langle M, d \rangle$, v nichž $d(x, y) = 1$ pro $x \neq y$ a $d(x, x) = 0$.

Úloha 1 *Nezápornost $d(x, y) \geq 0$ plyne z ostatních vlastností metriky.*

Úloha 2 *Dokažte následující zobecnění TN. Necht' $x_1, \dots, x_n$, $n \geq 2$, jsou body v metrickém prostoru $\langle M, d \rangle$. Pak $d(x_1, x_n) \leq \sum_{i=2}^n d(x_{i-1}, x_i)$.*

Definice třídy matematických struktur by měla být provázena definicí jejich izomorfismů. Definujeme izomorfismy metrických prostorů.

Definice 3 (izometrie) *Necht' $M = \langle M, d \rangle$ a $N = \langle N, e \rangle$ jsou dva metrické prostory. M a N jsou izometrické, existuje-li taková bijekce $F: M \rightarrow N$, že pro všechna $x, y \in M$ se*

$$d(x, y) = e(F(x), F(y)).$$

Zobrazení F pak je izometrie prostorů M a N .

Příklady izometrií uvádíme v Tvzení 11.

Úloha 4 *Je-li F izometrie dvou metrických prostorů, pak jí je i inverzní zobrazení F^{-1} .*

Eukleidovskou metriku e_n na $\mathbb{R}^n$ definujeme předpisem

$$e_n(\bar{x}, \bar{y}) = e_n(\langle x_1, \dots, x_n \rangle, \langle y_1, \dots, y_n \rangle) := \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}.$$

Tedy $e_1(x, y) = |x - y|$ je vzdálenost na reálné ose, kterou známe z *MA1*, a e_2 je euklidovská vzdálenost v rovině. Funkce e_n má zřejmě vlastnosti 1 a 2 metriky. Zbývá dokázat trojúhelníkovou nerovnost. Odvodíme ji ze známé *Cauchyho–Schwarzovy nerovnosti*. Připisuje se francouzskému matematikovi *Augustinu-Louisi Cauchyemu (1789–1857)* (několik let žil v Praze) a německému matematikovi *Hermannu Schwarzovi (1843–1921)*.

Věta 5 (CSN) *Necht' $x_1, y_1, \dots, x_n, y_n$ je $2n$ reálných čísel ($n \in \mathbb{N}$). Potom*

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2 \cdot \sum_{j=1}^n y_j^2}.$$

Důkaz. Umocníme obě strany na druhou a vidíme, že CSN platí, pokud platí nerovnost

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 y_i^2 + 2 \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^n x_i y_i x_j y_j \leq \sum_{i=1}^n x_i^2 \cdot \sum_{j=1}^n y_j^2$$

— $z \leq \sqrt{z^2}$ pro každé $z \in \mathbb{R}$ a funkce $f(z) = \sqrt{z}$ je rostoucí na $\mathbb{R}_{\geq 0}$. Tato nerovnost je ekvivalentní nerovnosti

$$0 \leq \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^n (x_i y_j - x_j y_i)^2.$$

Ta platí, protože $z^2 \geq 0$ pro každé $z \in \mathbb{R}$. □

Důsledek 6 *Pro libovolné tři n -tice $\bar{x}$, $\bar{y}$ a $\bar{z}$ v $\mathbb{R}^n$ platí*

$$e_n(\bar{x}, \bar{y}) \leq e_n(\bar{x}, \bar{z}) + e_n(\bar{z}, \bar{y}).$$

Důkaz. Položme $u_i := x_i - z_i$ a $v_i := z_i - y_i$. Vidíme, že stačí dokázat, že

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n (u_i + v_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n u_i^2} + \sqrt{\sum_{j=1}^n v_j^2}.$$

Umocníme obě strany na druhou a vidíme, že poslední nerovnost je ekvivalentní nerovnosti

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (u_i + v_i)^2 &\leq \sum_{i=1}^n u_i^2 + \sum_{j=1}^n v_j^2 + 2\sqrt{\sum_{i=1}^n u_i^2 \cdot \sum_{j=1}^n v_j^2} \\ \iff \sum_{i=1}^n u_i v_i &\leq \sqrt{\sum_{i=1}^n u_i^2 \cdot \sum_{j=1}^n v_j^2}. \end{aligned}$$

Poslední nerovnost je Cauchyho–Schwarzova nerovnost. □

Dvojice $\langle \mathbb{R}^n, e_n \rangle$ je tedy metrický prostor. Nazýváme ho (n -*rozměrným*) *eukleidovským prostorem* a označujeme E_n . Mohli bychom uvést mnoho dalších příkladů metrických prostorů, ale necháme si je do *MA3*. Zde se omezíme na několik příkladů dalších metrik na $\mathbb{R}^n$. Funkce

$$e_{n,\max}(\bar{x}, \bar{y}) := \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|, \quad e_{n,\text{sum}}(\bar{x}, \bar{y}) := \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|,$$

a $e_{n,p}(\bar{x}, \bar{y}) := \left(\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^p \right)^{1/p}$, kde $p \geq 1$ je reálné, nazýváme po řadě *maximovou metrikou*, *součtovou metrikou* a L_p *metrikou*. Všimněte si, že $e_n = e_{n,2}$.

Úloha 7 Dokažte, že $e_{n,\max}$ a $e_{n,\text{sum}}$ jsou metriky na $\mathbb{R}^n$, tj. že splňují TN.

Důkaz TN pro L_p vzdálenosti je složitější. Později vysvětlíme, že všechny vzdálenosti e_n , $e_{n,\max}$, $e_{n,\text{sum}}$ a $e_{n,p}$ jsou v jistém smyslu velmi podobné.

Dvě operace s metrickými prostory

Nechť $M = \langle M, d \rangle$ a $N = \langle N, e \rangle$ jsou metrické prostory a necht' $\emptyset \neq A \subset M$. Podprostor prostoru M indukovaný podmnožinou A je dvojice

$M|A := \langle A, d' \rangle$ kde $d': A \times A \rightarrow \mathbb{R}$ je dáno předpisem $d'(x, y) := d(x, y)$

—metriku d zúžíme na $A \times A$.

Úloha 8 Ukažte, že $M|A$ je metrický prostor.

Druhou operací je součin prostorů. Součin metrických prostorů M a N je dvojice

$\langle M \times N, d' \rangle$, kde zobrazení $d': (M \times N) \times (M \times N) \rightarrow \mathbb{R}$

je dáno vztahem

$$d'(\langle a, b \rangle, \langle a', b' \rangle) := \sqrt{d(a, a')^2 + e(b, b')^2}.$$

Tvrzení 9 Součin dvou metrických prostorů je metrický prostor.

Důkaz. Protože d a e jsou metriky, je snadné ukázat, že zobrazení d' má vlastnosti 1 a 2 vzdálenosti (viz Cvičení 10). Dokážeme, že pro d' platí TN. Skutečně, pro libovolné dvojice $\bar{u} = \langle a, b \rangle$, $\bar{v} = \langle a', b' \rangle$ a $\bar{w} = \langle a'', b'' \rangle$ v $M \times N$ platí

$$\begin{aligned} d'(\bar{u}, \bar{v}) &= \sqrt{d(a, a')^2 + e(b, b')^2} \\ &\leq \sqrt{(d(a, a'') + d(a'', a'))^2 + (e(b, b'') + e(b'', b'))^2} \\ &\leq \sqrt{d(a, a'')^2 + e(b, b'')^2} + \sqrt{d(a'', a')^2 + e(b'', b')^2} \\ &= d'(\bar{u}, \bar{w}) + d'(\bar{w}, \bar{v}). \end{aligned}$$

První rovnost plyne z definice d' . Druhá nerovnost plyne ze dvou použití TN pro metriky d a e . Třetí nerovnost je speciálním případem první nerovnosti v důkazu Důsledku 6. Poslední, čtvrtá rovnost plyne z definice d' . $\square$

Úloha 10 Dokažte, že zobrazení d' má vlastnosti 1 a 2 vzdálenosti.

Tvrzení 11 Součin $E_m \times E_n$ eukleidovských metrických prostorů je izometrický s eukleidovským metrickým prostorem E_{m+n} .

Důkaz. Definujeme zobrazení $F: \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{m+n}$ předpisem

$$F(\langle x_1, \dots, x_m \rangle, \langle y_1, \dots, y_n \rangle) := \langle x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n \rangle,$$

a ukážeme, že jde o izometrii mezi součinným prostorem $E_m \times E_n$ a eukleidovským prostorem E_{m+n} . Je zřejmé, že F je bijekce (viz Cvičení 12). Ukážeme, že F zachovává vzdálenosti. Pro $\bar{u} := \langle x_1, \dots, x_m \rangle$, $\bar{u}' := \langle x'_1, \dots, x'_m \rangle$, $\bar{v} := \langle y_1, \dots, y_n \rangle$ a $\bar{v}' := \langle y'_1, \dots, y'_n \rangle$ skutečně platí

$$\begin{aligned} d'(\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle, \langle \bar{u}', \bar{v}' \rangle) &= \sqrt{e_m(\bar{u}, \bar{u}')^2 + e_n(\bar{v}, \bar{v}')^2} \\ &= \sqrt{\sum_{i=1}^m (x_i - x'_i)^2 + \sum_{i=1}^n (y_i - y'_i)^2} \\ &= \sqrt{\sum_{i=1}^{m+n} (F(\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle)_i - F(\langle \bar{u}', \bar{v}' \rangle)_i)^2} \\ &= e_{m+n}(F(\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle), F(\langle \bar{u}', \bar{v}' \rangle)). \end{aligned}$$

První rovnost plyne z definice zobrazení d' . Druhá rovnost plyne z definice metrik e_m a e_n . Ve třetí rovnosti používáme definici F a souřadnicové značení

$$F(\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle) = \langle F(\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle)_1, \dots, F(\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle)_{m+n} \rangle.$$

Poslední, čtvrtá rovnost plyne z definice e_{m+n} . □

Úloha 12 Dokažte, že výše uvedená funkce F je bijekce.

Koule, otevřené množiny, uzavřené množiny

Nechť $M = \langle M, d \rangle$ je metrický prostor, $b \in M$ je bod v něm a $r > 0$ je reálné číslo. Množina

$$B_M(b, r) = B(b, r) := \{a \in M: d(a, b) < r\} \quad (\subset M)$$

je (otevřená) koule v M se středem b a poloměrem r . Vždy $b \in B(b, r)$. Rovněž $0 < r \leq s \Rightarrow B(b, r) \subset B(b, s)$. Co jsou uzavřené koule? Podmnožiny M tvaru

$$\bar{B}_M(b, r) = \bar{B}(b, r) := \{a \in M: d(a, b) \leq r\}.$$

Definice 13 (otevřené a uzavřené množiny) Množina $X \subset M$ v metrickém prostoru $\langle M, d \rangle$ je otevřená, jestliže

$$\forall b \in X \exists r > 0: B(b, r) \subset X.$$

Řekneme, že množina $X \subset M$ je uzavřená, jestliže její doplněk $M \setminus X$ je otevřená množina.

Úloha 14 Dokažte, že každá koule je otevřená množina a že každá uzavřená koule je uzavřená množina.

Dokážeme několik vlastností otevřených a uzavřených množin.

Tvrzení 15 Necht' $M = \langle M, d \rangle$ je metrický prostor. Otevřené množiny v M mají následující vlastnosti.

1. Množiny $\emptyset$ a M jsou otevřené.
2. Jsou-li X a Y otevřené množiny, je i jejich průnik $X \cap Y$ otevřený.
3. Pro libovolný systém otevřených množin X_i , $i \in I$, je sjednocení

$$\bigcup_{i \in I} X_i$$

otevřená množina. Pro $I = \emptyset$ definujeme toto sjednocení jako $\emptyset$.

Důkaz. 1. Pokud jde o $\emptyset$, každé tvrzení tvaru $\forall x \in \emptyset \dots$ platí. Pokud jde o M , každá koule v M je podmnožinou M .

2. Necht' X a Y jsou otevřené podmnožiny M a necht' $a \in X \cap Y$ (pokud $X \cap Y = \emptyset$, tvrzení platí podle části 1). Existují taková reálná čísla $r, r' > 0$, že $B(a, r) \subset X$ a $B(a, r') \subset Y$. Položme $r'' := \min(r, r') (> 0)$. Protože $B(a, r'')$ je obsažena v obou koulích $B(a, r)$ a $B(a, r')$ (a je rovna jedné z nich), máme $B(a, r'') \subset X \cap Y$.

3. Necht' $a \in \bigcup_{i \in I} X_i$ (pokud $\bigcup_{i \in I} X_i = \emptyset$, tvrzení platí podle části 1). Pak $a \in X_j$ pro nějaké $j \in I$. Tedy $B(a, r) \subset X_j$ pro nějaké $r > 0$ a máme $B(a, r) \subset \bigcup_{i \in I} X_i$. $\square$

Úloha 16 Proč je pravda, že "každé tvrzení tvaru $\forall x \in \emptyset \dots$ platí"?

Úloha 17 *Ukažte, že každý konečný průnik otevřených množin je otevřená množina, ale že to obecně neplatí pro nekonečné průniky.*

Pomocí následujících identit odvodíme z vlastností otevřených množin duální vlastnosti uzavřených množin.

Úloha 18 *Dokažte De Morganovy identity. Je-li U množina a $A_i \subset U$ pro $i \in I$ je libovolný systém množin, pak platí*

$$U \setminus \bigcup_{i \in I} A_i = \bigcap_{i \in I} (U \setminus A_i) \quad \text{a} \quad U \setminus \bigcap_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I} (U \setminus A_i).$$

Důsledek 19 *Nechť $M = \langle M, d \rangle$ je metrický prostor. Uzavřené množiny v M mají následující vlastnosti.*

1. *Množiny $\emptyset$ a M jsou uzavřené.*
2. *Jsou-li X a Y uzavřené množiny, je i jejich sjednocení $X \cup Y$ uzavřené.*
3. *Pro libovolný systém uzavřených množin X_i , $i \in I$, je i průnik*

$$\bigcap_{i \in I} X_i$$

uzavřená množina. Pro $I = \emptyset$ definujeme tento průnik jako M .

Důkaz. 1. To plyne z části 1 Tvrzení 15 a z definice uzavřených množin, protože $\emptyset$ a M jsou navzájem doplňky.

2 a 3. To plyne z definice uzavřených množin a z částí 2 a 3 Tvrzení 15 pomocí De Morganových identit. $\square$

Otevřené a uzavřené množiny se někdy považují za protiklady nebo za navzájem se vylučující, ale to je nepřesné. V každém metrickém prostoru M existují alespoň dvě množiny, které jsou zároveň otevřené i uzavřené, totiž $\emptyset$ a M . Takové množiny se nazývají *obojetné* a hrají důležitou roli v definici souvislých prostorů, s nimiž se setkáme později.

Úloha 20 *Ukažte, že libovolné konečné sjednocení uzavřených množin je uzavřená množina, ale že obecně to neplatí pro nekonečná sjednocení.*

Spojitá zobrazení mezi metrickými prostory

Nechť $M = \langle M, d \rangle$ a $N = \langle N, e \rangle$ jsou metrické prostory, nechť $X \subset M$ a nechť $f: X \rightarrow N$ je zobrazení. Řekneme, že zobrazení f je *spojité* v bodě $b \in X$, když pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$, že

$$f([B_M(b, \delta)]) \subset B_N(f(b), \varepsilon).$$

Řekneme, že zobrazení f je *spojité*, jestliže je spojitý v každém bodě množiny X . V definici používáme následující značení pro funkce. Jsou-li A a B množiny, $g: A \rightarrow B$ je funkce a C je *libovolná* množina (nikoli nutně podmnožina A , jak se obvykle nadbytečně předpokládá), definujeme *obraz množiny C funkcí g* jako množinu

$$g[C] := \{g(x) : x \in A \cap C\} \quad (\subset B).$$

Úloha 21 V této situaci, s M , N , X , f a b jako výše, můžeme f chápat také jako zobrazení $f_0 = f$ z M' do N pro podprostor $M' = M|X$. Ukažte, že f je spojitý v bodě b (v uvedeném smyslu) právě tehdy, když f_0 je spojitý v bodě b .

Nic tedy neztrácíme, omezíme-li se na spojitá, všude definovaná zobrazení mezi metrickými prostory.

Spojitosť zobrazení mezi prostory lze ekvivalentně charakterizovat pomocí vzorů otevřených (nebo uzavřených) množin. Stejně jako výše, jsou-li A a B množiny, $g: A \rightarrow B$ je funkce a C je *libovolná* množina, definujeme *vzor množiny C funkcí g* jako množinu

$$g^{-1}[C] := \{x \in A : g(x) \in C\} \quad (\subset A).$$

Tvrzení 22 Nechť $M = \langle M, d \rangle$ a $N = \langle N, e \rangle$ jsou metrické prostory a nechť $f: M \rightarrow N$ je zobrazení. Pak f je spojitý zobrazení

$$\iff f^{-1}[B] \text{ je otevřená mn. v } M \text{ pro každou otevřenou mn. } B \text{ v } N.$$

Důkaz. Předpokládejme, že f je spojitý, že $B \subset N$ je libovolná otevřená množina v N a že $b \in f^{-1}[B]$ je libovolný bod jejího vzoru. Protože $f(b) \in B$, existuje $\varepsilon > 0$, že $B_N(f(b), \varepsilon) \subset B$. Jelikož je f spojitý v bodě b , existuje $\delta > 0$, že

$$f[B_M(b, \delta)] \subset B_N(f(b), \varepsilon) \quad (\subset B).$$

Tedy $f(x) \in B$ pro každé $x \in B_M(b, \delta)$, což znamená, že $B_M(b, \delta) \subset f^{-1}[B]$ a $f^{-1}[B] (\subset M)$ je otevřená množina.

Předpokládejme, že platí pravá strana ekvivalence, že $b \in M$ je libovolný bod v M a že je dáno $\varepsilon > 0$. Podle Cvičení 14 je koule $B_N(f(b), \varepsilon)$ otevřená množina v N . Z předpokladu je vzor $P := f^{-1}[B_N(f(b), \varepsilon)]$ otevřená množina v M . Protože $b \in P$, můžeme zvolit $\delta > 0$ takové, že $B_M(b, \delta) \subset P$. Odtud plyne, že

$$f[B_M(b, \delta)] \subset B_N(f(b), \varepsilon)$$

a f je spojitý v bodě b . To platí pro každé $b \in M$, a tedy je f spojitý. $\square$

Úloha 23 *Ekvivalence platí také s uzavřenými množinami.*

Pro třetí ekvivalentní formulaci spojitosti budeme potřebovat limity posloupností v metrických prostorech. Nechť $M = \langle M, d \rangle$ je metrický prostor, $b \in M$, a nechť $(a_n) \subset M$ je posloupnost bodů v M . Jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$, že pro každý index $n \geq n_0$ platí

$$d(a_n, b) \leq \varepsilon,$$

píšeme $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = b$ nebo $\lim a_n = b$ nebo $a_n \rightarrow b$ a řekneme, že *posloupnost (a_n) má limitu b* .

Úloha 24 *Dokažte, že $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = b \iff \lim_{n \rightarrow \infty} d(a_n, b) = 0$ (jde o dva různé druhy limit).*

Úloha 25 *Dokažte, že limity jsou jednoznačné, tj. jsou-li $a, b \in M$ a je-li $(c_n) \subset M$ taková posloupnost bodů v metrickém prostoru M , že platí $\lim c_n = a$ i $\lim c_n = b$, pak $a = b$.*

Věta 26 (Heineova definice) *Nechť $f: M \rightarrow N$ je zobrazení mezi metrickými prostory. Potom je f spojitý v bodě $b \in M$ právě tehdy, když se limita $\lim f(a_n) = f(b)$ pro každou posloupnost $(a_n) \subset M$ s $\lim a_n = b$.*

Důkaz. Předpokládejme, že f je spojitý v bodě b , že $(a_n) \subset M$ je posloupnost s $\lim a_n = b$ a že je dáno $\varepsilon > 0$. Pak $f[B_M(b, \delta)] \subset B_N(f(b), \varepsilon)$ pro nějaké $\delta > 0$. Jelikož $a_n \rightarrow b$, existuje n_0 tak, že $a_n \in B_M(b, \delta)$ pro každý index $n \geq n_0$. Potom $f(a_n) \in B_N(f(b), \varepsilon)$ pro tytéž indexy n . Vidíme tedy, že $f(a_n) \rightarrow f(b)$.

Předpokládejme, že f není spojitý v bodě b . To znamená, že existuje takové $\varepsilon > 0$, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$f[B_M(b, 1/n)] \not\subset B_N(f(b), \varepsilon).$$

S použitím *axiomy výběru* pro každý index $n \in \mathbb{N}$ zvolíme prvek a_n v kouli $B_M(b, 1/n)$ tak, aby $f(a_n) \notin B_N(f(b), \varepsilon)$. Tím dostaneme posloupnost $(a_n) \subset M$ s limitou $\lim a_n = b$, avšak posloupnost $(f(a_n))$ nemá limitu $f(b)$. $\square$

Eduard Heine (1821–1881) byl německý matematik.

Úloha 27 *Přečtěte si na Wikipedii o množinovém axiomu výběru a o jeho významu pro matematiku.*

Dokážeme charakterizaci uzavřených množin pomocí limit posloupností.

Tvrzení 28 *Množina $X \subset M$ v metrickém prostoru $\langle M, d \rangle$ je uzavřená právě tehdy, když pro každou posloupnost bodů $(a_n) \subset X$, která má limitu, tato limita leží v X .*

Důkaz. Předpokládejme, že X je uzavřená, $(a_n) \subset X$ má limitu $\lim a_n = b$, ale že $b \in M \setminus X$. Poslední množina je otevřená, takže $B(b, r) \subset M \setminus X$ pro nějaké $r > 0$. Z definice limity plyne, že pro všechna dostatečně velká n je $a_n \in B(b, r)$ a tedy i $a_n \notin X$, což je spor. Tedy $b \in X$.

Předpokládejme, že X není uzavřená. Pak doplněk $M \setminus X$ není otevřený, což znamená, že existuje takový bod $b \in M \setminus X$, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$B(b, 1/n) \cap X \neq \emptyset.$$

S použitím *axiomy výběru* pro každé n zvolíme bod $a_n \in B(b, 1/n) \cap X$. Takto dostaneme takovou posloupnost (a_n) , že $(a_n) \subset X$ a $\lim a_n = b$. Avšak $b \notin X$. $\square$

Úplné množiny a úplné prostory

Nechť $M = \langle M, d \rangle$ je metrický prostor a $(a_n) \subset M$ je posloupnost bodů v něm. Posloupnost (a_n) je *Cauchyovská*, pokud pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$, že $d(a_m, a_n) \leq \varepsilon$ pro každé dva indexy $m, n \geq n_0$.

Definice 29 (úplnost) *Množina $X \subset M$ v metrickém prostoru $\langle M, d \rangle$ je úplná, jestliže každá Cauchyovská posloupnost $(a_n) \subset X$ má limitu v X . Je-li celá množina M úplná, řekneme, že prostor M je úplný.*

Například reálná přímka $\mathbb{R}$, chápaná jako metrický prostor $E_1 = \langle \mathbb{R}, |x - y| \rangle$, je úplný prostor. Plyne to z věty známé z MA1, že posloupnost $(a_n) \subset \mathbb{R}$ je Cauchyovská právě tehdy, když má (konečnou) limitu.

Úloha 30 *Dokažte, že diskrétní metrické prostory (definovali jsme je na začátku) jsou úplné.*

Tvrzení 31 *Nechť $M = \langle M, d \rangle$ je úplný metrický prostor a nechť $X \subset M$. Potom je množina X úplná právě tehdy, když je uzavřená.*

Důkaz. Předpokládejme, že X je úplná a že $(a_n) \subset X$ je posloupnost s limitou $\lim a_n = b$ ($\in M$). Pak (a_n) je Cauchyovská posloupnost (viz Cvičení 32). Jelikož X je úplná a limita je jednoznačná, platí $b \in X$. Podle Tvrzení 28 je X uzavřená.

Předpokládejme, že X není úplná. Pak existuje Cauchyovská posloupnost v X , která nemá limitu nebo má limitu mimo X . Jelikož jsme v úplném prostoru M , nastává druhá možnost. Podle Tvrzení 28 tedy množina X není uzavřená. $\square$

Úloha 32 *Má-li posloupnost v metrickém prostoru limitu, pak je tato posloupnost Cauchyovská.*

Úloha 33 *Nechť A a B jsou úplné množiny v metrickém prostoru. Je množina $A \cap B$ úplná? Je $A \cup B$ úplná?*

Literatura

Učebnice I. Netuky pojednává o úplnosti na úrovni funkcionální analýzy.

1. M. Hušek, *Metrické prostory*, Matfyzpress, Praha 2024
2. I. Netuka, *Základy moderní analýzy*, Matfyzpress, Praha 2015