

PŘÍKLADY NA CVIČENÍ 6 Z MA 2, 3. 11. 2025

Nejprve ještě dva příklady na kompaktní množiny, v nich $M = (M, d)$ je metrický prostor. Pak tři příklady na determinanty, v nich $M \in \mathbb{Z}^{n \times n}$ je čtvercová $n \times n$ matice, jejíž položky jsou celá čísla.

1. Necht' $A, B \subset M$ jsou kompaktní množiny. Pomocí definice kompaktnosti posloupnostmi dokažte, že i $A \cup B$ je kompaktní množina.
2. Dokažte, že množina $A \cup B$ je kompaktní pomocí definice kompaktnosti otevřenými pokrytími.
3. Dokažte, že $\det M$ je celé číslo.
4. Necht' $M = (a_{i,j})_{i,j=1}^n$ a $|a_{i,j}| \leq A$ pro každé $i, j = 1, 2, \dots, n$ ($A \geq 0$ je nějaké reálné číslo). Pak $|\det M| \leq ?$, to jest, jak můžeme pomocí A a n shora odhadnout velikost determinantu?
5. Necht' M je taková regulární matice, že i její inverzní matice M^{-1} je celočíselná, tj. $M^{-1} \in \mathbb{Z}^{n \times n}$. Dokažte, že pak $\det M = \pm 1$.