PŘÍKLADY NA CVIČENÍ 3 Z MA 2, 13. 10. 2022

Připomínáme, že v *ultrametrickém prostoru* $X = (X, d)$ (krátce UMP), speciálním druhu metrického prostoru, platí *silná* Δ*-ová nerovnost* $d(x, y) \le \max(\{d(x, z), d(z, y)\})$.

1. Dokažte, že v UMP jsou v každém trojúhelníku některé dvě strany stejně dlouhé — každý trojúhelník je rovnoramenný.

2. Dokažte, že v UMP je pro každou kouli $B(a, r)$ každý její bod $b \in B(a, r)$ jejím středem.

3. V diferenciálním počtu funkcí více proměnných je třeba ovládat lineární algebru. Nechť $k, l, m, n \in \mathbb{N}$ (jsou to čtyři přirozená čísla) a $A \in \mathbb{R}^{k \times l}$, $B \in \mathbb{R}^{l \times m}$ a $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$ jsou tři reálné matice s uvedenými rozměry. Definujte maticový součin $A \cdot B$.

4. Dokažte asociativitu maticového násobení:
$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)\ .$$

5. Nechť $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ a $g_i\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3$, jsou zobrazení daná vzorci $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$, $g_1(x, y) = 2x + y$, $g_2(x, y) = \sin(x + y)$ a $g_3(x, y) = \cos(x + y)$ a
$$h(x,\, y) = f(g_1(x,\, y),\, g_2(x,\, y),\, g_3(x,\, y))$$
je složené zobrazení. Vypočítejte podle řetězového pravidla parciální derivace
$$\frac{\partial h}{\partial x} \text{ a } \frac{\partial h}{\partial y}\ .$$