PŘÍKLADY NA CVIČENÍ 1 Z MA 2, 29. 9. 2022

Nejprve ale **podmínky udělení zápočtu:** vypracujete $\geq \frac{3}{5}$ z příkladů a zápočtovou písemku, která bude na posledním cvičení, napíšete na $\geq \frac{1}{2}$ bodů. Na každém cvičení, kromě posledního, bude zadáno 5 příkladů (ideálně souvisejících s látkou na přednášce), jejichž řešení mi prosím pošlete e-mailem (v čitelné podobě) na adresu `klazar@kam.mff.cuni.cz` do půlnoci následující středy. Správná řešení pak proberu na cvičení ve čtvrtek.

1. Napište množinovou definici funkce $f\colon A \to B$. Co je to definiční obor a obor hodnot funkce? Pro $A' \subset A$ a $B' \subset B$ definujte množiny $f[A']$ a $f^{-1}[B']$.

2. Napište definici (axiomy) metrického prostoru
$$(X,\, d)\ .$$
Ukažte, že nezápornost metriky $d \geq 0$ se dá odvodit z ostatních axiomů.

3. Pro reálná čísla $a < b$ označíme jako $\mathcal{R}(a,b)$ množinu těch funkcí $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, které mají na intervalu $[a,b]$ Riemannův integrál, a pro $f,g \in \mathcal{R}(a,b)$ definujeme
$$d(f,g) := \int_a^b |f(x) - g(x)|\,\mathrm{dx}\ .$$
Je $(\mathcal{R}(a,b), d)$ metrický prostor?

4. Definujte v metrickém prostoru (X,d) otevřené množiny a koule $B(x,r)$ (ve značení přednášky to je $\Omega(x,r)$) se středem $x \in X$ a poloměrem $r > 0$. Dokažte, že každá koule je otevřená množina.

5. Pro množiny A a B definujte kartézský součin $A \times B$. Dokažte: jsou-li A a B neprázdné, pak platí, že
$$A \neq B \Rightarrow A \times B \neq B \times A\ .$$