Martin Klazar
MA 1, PŘEDNÁŠKA 14, 23. 5. 2024

DALŠÍ POUŽITÍ RIEMANNOVA INTEGRÁLU

Tři jsme už viděli: $\int_a^x f = \int f$ (v. 7 v př. 10 a v. 1 v př. 13), plocha pod grafem $\mathrm{PG}(f) = \int_a^b f$ (v. 16 v př. 10) a důkaz transcendence čísla e (v. 13 v př. 12). Teď uvedeme další použití R. integrálu.

Délka grafu funkce

Pro body $u = (u_x, u_y)$ a $v = (v_x, v_y)$ v rovině $\mathbb{R}^2$ označíme jejich vzdálenost jako

$$d(u,\, v) := \sqrt{(u_x - v_x)^2 + (u_y - v_y)^2}\ \ (\in [0,\, +\infty))\,.$$

Pro $f \in \mathcal{F}(M)$ a $x \in M$ položíme $f\langle x\rangle := (x, f(x))$ $(\in G_f)$. Pro dělení $\overline{a} = (a_0, \ldots, a_n)$ intervalu $[a, b]$ a $f \in \mathcal{F}([a, b])$ je lomený součet

$$L(\overline{a},\, f) := \textstyle\sum_{i=1}^n d(f\langle a_{i-1}\rangle,\, f\langle a_i\rangle)$$

rovný celkové délce odpovídající lomené čáry, která aproximuje graf $G_f = \{f\langle x\rangle :\ a \le x \le b\}$.

- *Úloha.* Když $\overline{a}$ zjemňuje $\overline{b}$, pak $L(\overline{a}, f) \ge L(\overline{b}, f)$.

Definice 1 (délka grafu) *Nechť funkce f je v $\mathcal{F}([a, b])$. Délka (jejího) grafu je* $\mathrm{L}(f) := \sup\big(\{L(\overline{a}, f) :\ \overline{a}\ \}\big)$ *(≥ 0 nebo $= +\infty$), $\overline{a}$ probíhá všechna dělení intervalu $[a, b]$.*

- *Úloha.* Funkce $f = \big(x \sin(1/x)\,|\,(0, 1]\big) \cup \{(0, 0)\}$ v $\mathcal{F}([0, 1])$ je spojitá na kompaktní množině, ale má graf s délkou $\mathrm{L}(f) = +\infty$.

- *Vlastnosti délky grafu.* Pro $f \in \mathcal{F}([a, b])$, $a < b$, není těžké dokázat následující. (1) Je-li G_f úsečka v $\mathbb{R}^2$ s konci u a v, pak

$\mathrm{L}(f) = d(u, v)$. (2) Když $a < c < b$, $g := f \mid [a, c]$ & $h := f \mid [c, b]$, pak $\mathrm{L}(g) + \mathrm{L}(h) = \mathrm{L}(f)$. (3) Posun ani otočení grafu jeho délku nezmění. (4) Zvětšení či zmenšení grafu poměrem $c > 0$ zvětší či zmenší jeho délku také poměrem c.

- *Vyjádření délky grafu integrálem.* Je to následující vzorec.

> **Věta 2 (vzorec pro $\mathrm{L}(f)$)** *Nechť $a < b$, f je v $\mathcal{F}([a, b])$ a f' v $\mathcal{R}(a, b)$. <u>Pak</u> $\mathrm{L}(f) = \int_a^b \sqrt{1 + (f')^2}$ (> 0 a $< +\infty$).*

Důkaz. Nechť $g := \sqrt{1 + (f')^2}$. Podle důsledku 9 v minulé př. je $g \in \mathcal{R}(a, b)$. Pro dané $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2})$ vezmeme δ, že pro každé rozdělení $(\overline{a}, \overline{t})$ intervalu $[a, b]$ s $\|\overline{a}\| \le \delta$ je $|\int_a^b g - R(\overline{a}, \overline{t}, g)| \le \varepsilon$ (věta 1 v př. 12). Nechť $A := \mathrm{L}(f)$ ($\in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$) a $\overline{a}$ je dělení intervalu $[a, b]$, že $L(\overline{a}, f) \in U(A, \varepsilon)$. Podle úlohy výše můžeme předpokládat, že $\|\overline{a}\| \le \delta$. Ale

$$L(\overline{a},\ f) = \sum_{i=1}^n (a_i - a_{i-1}) \cdot \sqrt{1 + \left(\tfrac{f(a_i) - f(a_{i-1})}{a_i - a_{i-1}}\right)^2}\,.$$

Podle Lagrangeovy VSH existují body $t_i \in (a_{i-1}, a_i)$, $i \in [n]$, že $\frac{f(a_i) - f(a_{i-1})}{a_i - a_{i-1}} = f'(t_i)$. Pak s $\overline{t} := (t_1, \ldots, t_n)$ se $L(\overline{a}, f) = R(\overline{a}, \overline{t}, g)$. Tedy $|\int_a^b g - L(\overline{a}, f)| \le \varepsilon$ a $\int_a^b g \in U(A, 2\varepsilon)$. Takže $\int_a^b g = \int_a^b \sqrt{1 + (f')^2} = A = \mathrm{L}(f)$, speciálně $\mathrm{L}(f) \in \mathbb{R}$. □

- *Úloha.* Rozšiřte definici 1 a větu 2 na funkce $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}^n$.

- ML *odhad délky grafu.* Jde o analogii ML odhadu pro $\int$. „M“ ale teď znamená „monotónní“.

> **Tvrzení 3 (ML odhad)** *$a < b$ & funkce $f \in \mathcal{F}([a, b])$ je monotónní. <u>Pak</u> $\mathrm{L}(f) \le b - a + |f(b) - f(a)|$.*

Důkaz. Využijeme nerovnost $\sqrt{c^2+d^2} \le |c|+|d|$. Řekněme, že f je neklesající a nechť $\overline{a} = (a_0,\dots,a_n)$ je dělení intervalu $[a,b]$. Potom $L(\overline{a},f) = \sum_{i=1}^n \sqrt{(a_i-a_{i-1})^2+(f(a_i)-f(a_{i-1})^2} \le \sum_{i=1}^n((a_i-a_{i-1})+(f(a_i)-f(a_{i-1})) = b-a+f(b)-f(a)$. Tedy i $\mathrm{L}(f) \le b-a+f(b)-f(a)$. □

Délka jednotkové polokružnice

Nechť $I := [-1,1]$. Pro $f(x) := \sqrt{1-x^2}$ ($\in \mathcal{F}(I)$) je $G_f = \{(x,y):\ x^2+y^2=1, y\ge 0\}$ horní jednotková polokružnice. Spočítáme její délku. Nelze přímo použít větu 2, protože $f' = -x/\sqrt{\cdot} \notin \mathcal{R}(I^0)$. Pro $\delta \in (0,\frac{1}{2})$ si označíme $f(\delta) := f\,|\,[-1,-1+\delta]$, $g(\delta) := f\,|\,[-1+\delta,1-\delta]$ a $h(\delta) := f\,|\,[1-\delta,1]$. Pak

$$\mathrm{L}(f) = \mathrm{L}(f(\delta)) + \mathrm{L}(g(\delta)) + \mathrm{L}(h(\delta))$$

podle vlastnosti (2) výše a $\lim_{\delta\to 0}\mathrm{L}(f(\delta)) = \lim_{\delta\to 0}\mathrm{L}(h(\delta)) = 0$ podle tvrzení 3. Podle věty 2 se $\mathrm{L}(g(\delta))$ rovná

$$\int_{-1+\delta}^{1-\delta}\sqrt{1+(g(\delta)')^2} = \int_{-1+\delta}^{1-\delta}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \big[\arcsin x\big]_{-1+\delta}^{1-\delta}.$$

Takže jednotková polokružnice má délku $\mathrm{L}(f) = \lim_{\delta\to 0}\mathrm{L}(g(\delta)) = \lim_{\delta\to 0}[\arcsin x]_{-1+\delta}^{1-\delta} = \arcsin 1 - \arcsin(-1) = \frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{2}) = \pi$.

Plocha mezi dvěma grafy

Pro funkci $f \in \mathcal{F}([a,b])$ s $a<b$ a $f \ge 0$ jsme v 10. př. v definici 15 definovali plochu $\mathrm{PG}(f)$ pod G_f, tj. plochu útvaru $\{(x,y):\ a \le x \le b,\ 0 \le y \le f(x)\}$, jako supremum dolních součtů: $\mathrm{PG}(f) = \underline{\int_a^b} f = \sup(\{s(\overline{a},f):\ \overline{a}\})$, kde $\overline{a} = (a_0,\dots,a_n)$ je dělení intervalu $[a,b]$ & $s(\overline{a},f) = \sum_{i=1}^n (a_i-a_{i-1})m_i$. Zde m_i je infimum hodnot $f(x)$ pro $x \in [a_{i-1},a_i]$ a $\mathrm{PG}(f)$ tedy je supremum ploch těch sloupcových grafů (diagramů) postavených na intervalu $[a,b]$,

které se vejdou pod G_f. Zobecníme to pro rovinný útvar vymezený grafy dvou funkcí.

• *Plocha mezi dvěma grafy.* Nechť $a < b$, $I := [a, b]$ a $f, g \in \mathcal{F}(I)$. Rovinná množina $\underline{M_{f,g}} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \in I, f(x) \le y \le g(x)\}$ sestává z bodů ležících mezi G_f a G_g. Pro dělení $\overline{a} = (a_0, \dots, a_n)$ intervalu I položíme $I_i := [a_{i-1}, a_i]$, pak $|I_i| = a_i - a_{i-1}$. Pro $f \le g$ a dané dělení $\overline{a}$ definujeme mezisoučet

$$M(\overline{a},\ f,\ g) := \textstyle\sum_{i=1}^n |I_i| \cdot \max\big(\{\inf(g[I_i]) - \sup(f[I_i]),\ 0\}\big)$$

(≥ 0 nebo $= +\infty$)). Je to supremum ploch sloupcových grafů vztyčených na dělení $\overline{a}$ a obsažených v množině $M_{f,g}$. Když je $\inf(g[I_i]) < \sup(f[I_i])$, do $\{(x, y) : \ x \in I_i, f(x) \le y \le g(x)\}$ se nevejde žádný obdélník (ani s nulovou výškou) a takové intervaly I_i k mezisoučtu ničím nepřispívají (to jest přispívají 0).

• *Úloha.* Zjemněním dělení mezisoučty neklesnou.

> **Definice 4 (MG)** *Nechť $a < b$ & $f, g \in \mathcal{F}([a, b])$ s $f \le g$. Potom $\underline{\text{plocha mezi } G_f \text{ a } G_g}$ $\mathrm{MG}(f, g) := \sup\big(\{M(\overline{a}, f, g) : \overline{a}$ je dělení intervalu $[a, b]\}\big)$ (≥ 0 nebo $= +\infty$).*

• *Úloha.* Když f a g jsou omezené, pak $\mathrm{MG}(f, g) < +\infty$.

• *Vlastnosti plochy mezi grafy.* Pro $f, g \in \mathcal{F}([a, b])$, $a < b$ a $f \le g$, není těžké dokázat následující. (1) Když $M_{f,g} = [a, b] \times [c, d]$, kde $c \le d$, potom $\mathrm{MG}(f, g) = (b - a) \cdot (d - c)$. (2) Když $a < c < b$, $f_1 := f \,|\, [a, c]$, $f_2 := f \,|\, [c, b]$ a podobně pro g_i, pak $\mathrm{MG}(f_1, g_1) + \mathrm{MG}(f_2, g_2) = \mathrm{MG}(f, g)$. (3) Posun ani otočení $M_{f,g}$ nemění $\mathrm{MG}(f, g)$. (4) Zvětšení či zmenšení $M_{f,g}$ poměrem $c > 0$ zvětší či zmenší $\mathrm{MG}(f, g)$ poměrem c^2.

• *Plocha mezi grafy pomocí integrálu.* Zobecníme větu 16 z př. 10.

Věta 5 (vzorec pro $\mathrm{MG}(f,g)$**)** $a < b$, $f, g \in \mathcal{R}(a,b)$ & $f \le g$. Pak $\mathrm{MG}(f,g) = \int_a^b (g-f)$.

Důkaz. Nechť a, b, f a g jsou, jak uvedeno, a je dáno ε. Podle věty 1 v př. 12 vezmeme δ, že pro každé rozdělení $(\overline{a}, \overline{t})$ intervalu $[a,b]$ s $\|\overline{a}\| \le \delta$ je $|R(\overline{a}, \overline{t}, f) - \int_a^b f| \le \varepsilon$ i $|R(\overline{a}, \overline{t}, g) - \int_a^b g| \le \varepsilon$. Protože f a g jsou omezené, je $\mathrm{MG}(f,g) \in \mathbb{R}$, a s přispěním úlohy výše vezmeme dělení $\overline{a} = (a_0, \ldots, a_n)$, že $\|\overline{a}\| \le \delta$ & $|M(\overline{a}, f, g) - \mathrm{MG}(f,g)| \le \varepsilon$. Pro $i \in [n]$ položíme $I_i := [a_{i-1}, a_i]$. Definujeme $X := \{i \in [n] :\ \sup(f[I_i]) > \inf(g[I_i])\}$.

Nechť jsou dány $t_i', u_i' \in I_i$, $i \in X$, že $f(t_i') \ge g(u_i')$. Pro $i \in [n]$ vezmeme libovolné $t_i \in I_i$ a definujeme $t_i'' = u_i'' := t_i$ pro $i \in [n] \backslash X$ a $t_i'' := t_i'$ a $u_i'' := u_i'$ pro $i \in X$. Výraz

$$V := R(\overline{a},\, \overline{t},\, g) - R(\overline{a},\, \overline{t},\, f) - (R(\overline{a},\, \overline{u''},\, g) - R(\overline{a},\, \overline{t''},\, f))$$

se rovná $\sum_{i \in X} |I_i| \cdot (g(t_i) - f(t_i)) + \sum_{i \in X} |I_i| \cdot (f(t_i') - g(u_i')) =: V_1 + V_2$. Je $V_1, V_2 \ge 0$, protože všechny $(\cdot - \cdot) \ge 0$. Současně ale je $|V| \le 4\varepsilon$, protože $|R(\overline{a}, \overline{t}, g) - \int_a^b g| \le \varepsilon$ a analogické odhady platí i pro další tři Riemannovy součty ve výrazu V. Tedy

$$0 \le V_2 = \textstyle\sum_{i \in X} |I_i| \cdot (f(t_i') - g(u_i')) \le 4\varepsilon\,.$$

Pro toto dělení $\overline{a}$ intervalu $[a,b]$ teď definujeme dvě rozdělení $(\overline{a}, \overline{t})$ a $(\overline{a}, \overline{u})$. Pro $\sup(f[I_i]) \le \inf(g[I_i])$ vezmeme $t_i, u_i \in I_i$ tak, že $|f(t_i) - \sup(f[I_i])| \le \frac{\varepsilon}{b-a}$ a $|g(u_i) - \inf(g[I_i])| \le \frac{\varepsilon}{b-a}$. Pro $\sup(f[I_i]) > \inf(g[I_i])$ vezmeme t_i a u_i tak, že $f(t_i) \ge g(u_i)$.

Díky linearitě integrálu se $\int_a^b (g-f) = \int_a^b g - \int_a^b f$. S $v_i := \max(\{\inf(g[I_i]) - \sup(f[I_i]), 0\})$ je podle Δ-ové nerovnosti výraz

$$W := |R(\overline{a},\, \overline{u},\, g) - R(\overline{a},\, \overline{t},\, f) - M(\overline{a},\, f,\, g)|$$

$\leq \sum_{i=1}^{n} |I_i| \cdot |g(u_i) - f(t_i) - v_i|$. Pro $i \in [n] \setminus X$ je $|g(u_i) - f(t_i) - v_i| \leq \frac{2\varepsilon}{b-a}$. Pro $i \in X$ je $|g(u_i) - f(t_i) - v_i| = f(t_i) - g(u_i)$. Díky hořejšímu odhadu sumy přes $i \in X$ je W nejvýše

$$\tfrac{2\varepsilon}{b-a} \textstyle\sum_{i=1}^{n} |I_i| + \sum_{i \in X} |I_i| \cdot (f(t_i) - g(u_i)) \leq 2\varepsilon + 4\varepsilon = 6\varepsilon\,.$$

Takže $| \int_a^b (g - f) - \mathrm{MG}(f,g)| \leq | \int_a^b g - \int_a^b f - (R(\overline{a}, \overline{u}, g) - R(\overline{a}, \overline{t}, f))| + W + |M(\overline{a}, f, g) - \mathrm{MG}(f,g)| \leq | \int_a^b g - R(\overline{a}, \overline{u}, g)| + |R(\overline{a}, \overline{t}, f) - \int_a^b f| + 6\varepsilon + \varepsilon \leq 9\varepsilon$ a $\int_a^b (g - f) = \mathrm{MG}(f,g)$. $\square$

Plocha jednotkového kruhu

Vezmeme funkce $f(x) := -\sqrt{1-x^2}$ a $g(x) := \sqrt{1-x^2}$, obě jsou v $\mathcal{R}(-1,\,1)$. Pak $M_{f,g}$ je jednotkový kruh. Podle věty 5 má plochu

$$\mathrm{MG}(f,\,g) = \textstyle\int_{-1}^{1} (g - f) = 2 \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,.$$

Tento integrál spočítáme podle věty 3 v minulé přednášce (substituce v R. integrálu): $I = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $G(x) = \sin x$, $J = [-1, 1]$ a $f(x) = \sqrt{1-x^2}$. Pak $\int_{-1}^{1} f = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(G)G'$ a to je

$$\textstyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{1 - \sin^2 t} \cos t = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos(2t) + 1)/2\,.$$

To se podle ZVA 2 rovná $\frac{1}{2}[\sin(2t)/2]_{-\pi/2}^{\pi/2} + \frac{1}{2}[t]_{-\pi/2}^{\pi/2} = 0 - 0 + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$. Plocha jednotkového kruhu tedy je $\mathrm{MG}(f,g) = 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi$.

Plocha uvnitř elipsy

Spočítáme plochu uvnitř elipsy s x-ovou, resp. y-ovou, poloosou $a > 0$, resp. $b > 0$. Tato elipsa je dána rovnicí

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1\,.$$

Vezmeme funkce $f(x) := -b\sqrt{1-(x/a)^2}$ a $g(x) := b\sqrt{1-(x/a)^2}$ (jsou v $\mathcal{F}([-a,a])$) a spočítáme, že $\mathrm{MG}(f,g)$ se rovná

$$\textstyle\int_{-a}^{a}(g-f) = 2b\int_{-a}^{a}\sqrt{1-(x/a)^2}\,.$$

Substituce $x := at$ převádí poslední integrál na integrál, který jsme už spočítali:

$$a\textstyle\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2} = \pi a/2\,.$$

Takže plocha uvnitř elipsy s poloosami $a, b > 0$ je $\mathrm{MG}(f,g) = 2b\cdot\frac{\pi a}{2} = \pi ab$.

Plocha neomezeného útvaru pod grafem

Nechť $I := [a,+\infty)$, $f \in \mathcal{F}(I)$ a $f \geq 0$. Dělením intervalu I rozumíme posloupnost $(a = a_0 < a_1 < a_2 < \dots)$ s $\lim a_n = +\infty$. Nevlastní dolní součet definujeme jako

$$n(\overline{a},\ f) := \textstyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - a_{n-1})\cdot m_n$$

(≥ 0 nebo $= +\infty$), kde jako dříve se $m_n = \inf(\{f(x):\ a_{n-1} \leq x \leq a_n\})$ (≥ 0 a $< +\infty$). Geometrický výklad veličiny $n(\overline{a}, f)$ je jasný. Plocha pod grafem teď je

$$\mathrm{PG}(f) := \sup(\{n(\overline{a},\ f):\ \overline{a}\text{ je dělení int. }I\})\ \ (\geq 0 \vee = +\infty)\,.$$

Následující větu dokážeme v **K**.

Věta 6 (neomezená plocha pod grafem) *Když funkce $f \in \mathcal{R}([a,+\infty))$ a $f \geq 0$, pak* $\mathrm{PG}(f) = \int_a^{+\infty} f$.

- *Úloha.* Nechť $f_s(x) := x^s \mid [1,+\infty)$, $s \in \mathbb{R}$. Nalezněte $\mathrm{PG}(f_s)$.

Objem rotačního tělesa

Pro $a < b$ a funkci $f\colon [a,b] \to [0,+\infty)$ definujeme rotační těleso

$$T_f := \{(x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3:\ a \le x \le b \wedge y^2 + z^2 \le f(x)^2\}\ .$$

Vznikne rotací útvaru $= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2:\ a \le x \le b, 0 \le y \le f(x)\}$ kolem osy x. Pro dělení $\overline{a} = (a_0, \dots, a_n)$ intervalu $[a,b]$ definujeme kotoučový součet (opět $I_i = [a_{i-1}, a_i]$ a $|I_i| = a_i - a_{i-1}$)

$$K(\overline{a},\, f) := \pi \textstyle\sum_{i=1}^n |I_i| \cdot \inf(f[I_i])^2\ .$$

Je to supremum objemů činkových kotoučů nasazených na ose x na dělení $\overline{a}$ a obsažených v T_f. Kotouč s kruhovou základnou o poloměru r a s tloušťkou h má objem $\pi r^2 h$.

- *Úloha.* Zjemněním dělení kotoučové součty neklesnou.

Definice 7 (RT) *Nechť funkce $f \in \mathcal{F}([a,b])$ a $f \ge 0$. Pak objem T_f je* $\mathrm{RT}(f) := \sup\big(\{K(\overline{a}, f):\ \overline{a}$ *je dělení* $[a,b]\}\big)$.

- *Úloha.* Je-li f omezená, je $\mathrm{RT}(f) < +\infty$.

- *Vlastnosti objemu rotačního tělesa.* Pro $f \in \mathcal{F}([a,b])$, $a < b$ a $f \ge 0$, není těžké dokázat následující. (1) Je-li $f = k_c \,|\, [a,b]$ pak $\mathrm{RT}(f) = \pi c^2(b-a)$. (2) Když $a < c < b$, $f_1 := f \,|\, [a,c]$ a $f_2 := f \,|\, [c,b]$, pak $\mathrm{RT}(f_1) + \mathrm{RT}(f_2) = \mathrm{RT}(f)$. (3) Posun množiny T_f nemění $\mathrm{RT}(f)$. (4) Zvětšení či zmenšení množiny T_f poměrem $c > 0$ zvětší či zmenší její objem $\mathrm{RT}(f$ poměrem c^3.

- *Objem rotačního tělesa pomocí integrálu.*

Věta 8 (vzorec pro $\mathrm{RT}(f)$) $f \in \mathcal{R}(a,b)$ & $f \ge 0$. *Pak* $\mathrm{RT}(f) = \pi \int_a^b f^2$.

Důkaz. Nechť f je, jak uvedeno, a je dáno ε. Díky důsledku 7 v př. 13 i $f^2 \in \mathcal{R}(a,b)$. S pomocí úlohy výše vezmeme dělení $\overline{a}$ intervalu $[a,b]$, že $|K(\overline{a},f) - \mathrm{RT}(f)| \leq \varepsilon$ a $|s(\overline{a},f^2) - \int_a^b f^2| \leq \varepsilon$. Protože zřejmě $\pi \cdot s(\overline{a},f^2) = K(\overline{a},f)$ (je $\inf(f^2[I_i]) = \inf(f[I_i])^2$), je $|\pi \int_a^b f^2 - \mathrm{RT}(f)| \leq (1+\pi)\varepsilon$. Tedy $\pi \int_a^b f^2 = \mathrm{RT}(f)$. $\square$

Objem jednotkové koule

Je to $\mathrm{RT}(f)$ pro $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ ($\in \mathcal{R}(-1,1)$). Pak

$$\mathrm{RT}(f) = \pi \int_{-1}^{1} f^2 = \pi \int_{-1}^{1} (1-x^2)\,.$$

Poslední integrál se podle ZVA 2 rovná $[x - x^3/3]_{-1}^{1} = 1 - (-1) - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$. Objem jednotkové koule je tedy $\mathrm{RT}(f) = \frac{4}{3}\pi$.

Součty, nekonečné řady a integrály

Není-li řečeno jinak, integrály jsou Riemannovy.

- *Odhad monotónního součtu pomocí integrálu.*

> **Věta 9 ($\sum f(n)$ pro monotónní f)** *Nechť $a < b$ jsou v $\mathbb{Z}$ & $f \in \mathcal{F}([a,b])$ je monotónní. Pak existuje $\theta \in [0,1]$, že $\sum_{a<n\leq b} f(n) = \int_a^b f + \theta \cdot (f(b) - f(a))$.*

Důkaz. Podle věty 7 v př. 12 je $f \in \mathcal{R}(a,b)$. Nechť f je neklesající. Pro $m = a, a+1, \ldots, b-1$ díky monotonii $\int$ (úloha níže) je $f(m) \leq \int_m^{m+1} f \leq f(m+1)$. Pro tato m tak je

$$\int_m^{m+1} f \leq f(m+1) \leq \int_m^{m+1} f + f(m+1) - f(m)\,.$$

Sečtení těchto nerovností dává aditivitou $\int$ uvedený odhad. $\square$

- *Úloha.* Dokažte, že když $f, g \in \mathcal{R}(a,b)$ a $f \leq g$, pak $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.

Důsledek 10 (harmonická čísla 1) *Pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $h_n = \sum_{i=1}^{n} 1/i = \log n + \delta_n$, kde $1/n \le \delta_n \le 1$.*

Důkaz. Nechť $n \in \mathbb{N}$. Pak podle věty 9 existuje $\theta \in [0,1]$, že

$$h_n = 1 + \textstyle\sum_{i=2}^{n} 1/i = 1 + \int_1^n 1/x + \theta(1/n - 1)\,.$$

Podle ZVA 2 se to rovná $[\log x]_1^n + \delta_n = \log n + \delta_n$ s $\delta_n \in [\frac{1}{n}, 1]$. $\square$

- *Úloha.* Pro $m < n$ v $\mathbb{N}$ odhadněte sumu $\sum_{i=m}^{n} 1/\sqrt{i}$.

Stirlingova formule

James Stirling (1692–1770), zvaný „Benátčan", byl skotský matematik.

Důsledek 11 (slabý Stirling) *Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí, že $\log(n!) = n\log n - n + \delta_n$, kde $1 \le \delta_n \le 1 + \log n$.*

Důkaz. Pro $n \in \mathbb{N}$ opět podle věty 9 existuje $\theta \in [0,1]$, že

$$\log(n!) = \textstyle\sum_{i=1}^{n} \log i = \sum_{i=2}^{n} \log i = \int_1^n \log x + \theta(\log n - \log 1)\,.$$

Podle ZVA 2 se to rovná $[x\log x - x]_1^n + \theta\log n = n\log n - n + \delta_n$ s $\delta_n \in [1, 1+\log n]$. $\square$

Plná <u>Stirlingova formule</u> je asymptotika $\log(n!) = n\log n - n + \frac{1}{2}\log n + c + o(1)$ $(n \to +\infty)$, kde $c = \frac{1}{2}\log(2\pi)$. Ekvivalentně, pro $n \to +\infty$ je $n! \sim \sqrt{2\pi n}\cdot(n/\mathrm{e})^n$. <u>Asymptotická Stirlingova formule</u> je asymptotický rozvoj, že pro $m \in \mathbb{N}$ se $\log(n!)$ rovná

$$n\log n - n + \frac{\log n}{2} + c + \sum_{k=1}^{m} \frac{B_{2k}}{2k(2k-1)\cdot n^{2k-1}} + O(n^{-2m-1})$$

($n \in \mathbb{N}$), kde $B_{2k} \in \mathbb{Q}$ jsou tzv. Bernoulliova čísla (E. T. Copson, *Asymptotic Expansions*, CUP, Cambridge 1967, str. 1).

Integrální kritérium konvergence řad

Jde opět o důsledek věty 9.

> **Důsledek 12 (integrální kritérium)** *Nechť je $m \in \mathbb{Z}$ a $f \in \mathcal{F}([m, +\infty))$ je nezáporná a nerostoucí.* Pak *řada $\sum_{n=m}^{\infty} f(n)$ konverguje $\iff$ $\exists\, c$, že pro $\forall\, n$ je $\int_m^n f < c$.*

Důkaz. Pro každé n je $f \in \mathcal{R}(m, n)$ díky monotonii f. Podle věty 9 pro každé celé číslo $N \geq m + 1$ existuje $\theta \in [0, 1]$, že $\sum_{n=m}^{N} f(n)$ se rovná

$$f(m) + \int_m^N f + \theta(f(N) - f(m)) = \int_m^N f + \delta_N,\ \delta_N \in [0,\ f(m)]\,.$$

Takže (neklesající) posloupnost $\big(\sum_{n=m}^{N} f(n) :\ N \in \mathbb{N}\big)$ je shora omezená, právě když (neklesající) posloupnost $\big(\int_m^n f :\ n \in \mathbb{N}\big)$ je shora omezená. Dostáváme uvedenou ekvivalenci. $\square$

Například $\sum_{n=2}^{\infty} 1/(n \log n) = +\infty$, protože pro $n \to +\infty$ též $\int_2^n 1/x \log x = [\log(\log x)]_2^n = \log\log n - \log\log 2 \to +\infty$.

- *Úloha.* Pro každé $c > 1$ řada $\sum_{n=2}^{\infty} 1/n(\log n)^c$ konverguje.

Zpřesnění věty 9

Víme, že $\lfloor a \rfloor$ je *dolní celá část* čísla $a \in \mathbb{R}$, tedy největší $m \in \mathbb{Z}$ s $m \leq a$, a že $\{a\} = a - \lfloor a \rfloor \in [0, 1)$ je *zlomková část* čísla a.

> **Věta 13 ($\sum f(n)$ pro f s f')** *$f \in \mathcal{F}([a, b])$, $a < b$ jsou v $\mathbb{Z}$ & $f' \in \mathcal{R}(a, b)$.* Pak *$\sum_{a<n\leq b} f(n) = \int_a^b f + \int_a^b \{x\} f'(x)$.*

Důkaz. Nechť $T_1(a,b)$ je levá strana identity a $T_2(a,b)$ a $T_3(a,b)$ jsou, po řadě, členy napravo. T_2 i T_3 je korektně definovaný, $f \in \mathcal{C}$ a $\{x\}f'(x)$ je v $\mathcal{R}(a,b)$ podle Lebesgueovy věty minule. Dále se lehce vidí, že pro $i = 1,2,3$ je $T_i(a,b) = \sum_{j=a}^{b-1} T_i(j,j+1)$. Identitu tak stačí dokázat pro $b = a+1$. Podle integrace per partes (věta 9 v př. 12) se $T_3(a,a+1) = \int_a^{a+1}\{x\}f'(x) = \int_a^{a+1}(x-a)f'(x)$ rovná

$$[(x-a)f(x)]_a^{a+1} - \int_a^{a+1} f = f(a+1) - \int_a^{a+1} f\ ,$$

což je $T_1(a,a+1) - T_2(a,a+1)$. Takže opravdu $T_1(a,a+1) = T_2(a,a+1) + T_3(a,a+1)$. $\square$

Pomocí této identity zesílíme důsledek 10 a odvodíme tak asymptotiku harmonických čísel uvedenou ve větě 3 v přednášce 4.

Důsledek 14 (harmonická čísla 2) *Pro $n \in \mathbb{N}$ je $h_n = \sum_{i=1}^{n} 1/i = \log n + \gamma + O(1/n)$.*

Zde $\gamma = 0.57722\dots$ je *Eulerova konstanta* (není známo, zda je iracionální).

Důkaz. Podle věty 13 pro každé $n \in \mathbb{N}$ je

$$\begin{aligned} h_n &= 1 + \int_1^n 1/x - \int_1^n \{x\}/x^2 \\ &\overset{(1)}{=} \log n + 1 - \int_1^{+\infty}\{x\}/x^2 + \int_n^{+\infty}\{x\}/x^2\ . \end{aligned}$$

Ovšem $0 \le \int_n^{+\infty}\{x\}/x^2 \overset{(2)}{\le} \int_n^{+\infty} x^{-2} \overset{(3)}{=} 1/n$ a dostáváme tak uvedenou asymptotiku a také vyjádření $\gamma = 1 - \int_1^{+\infty}\{x\}/x^2$. $\square$

- *Úloha.* Dokažte relace (1), (2) a (3).

DĚKUJI ZA POZORNOST! V R. 2024 TO JE Z MA 1 VŠE