Martin Klazar

MA 1, PŘEDNÁŠKA 13, 16. 5. 2024

DÁLE O RIEMANNOVĚ INTEGRÁLU. HENSTOCK–KURZWEILŮV INTEGRÁL

Dnešní předposlední přednáška obsahuje výraznou českou stopu. Začneme ale dvěma základními větami analýzy.

Dvě základní věty analýzy

Vztahy mezi derivací a Riemannovým integrálem jsme se zabývali už v desáté přednášce: $(\int_a^x f)' = f$ (věta 7) a $\int_a^b f = [\int f]_a^b$ (věta 13). Dnes je zobecníme na netriviální intervaly I (pro $I = \{a\}$ se $\int_I f = 0$ a vše je triviální).

• *Lipschitzovské funkce.* Funkce $f \in \mathcal{F}(M)$ je lipschitzovská (přesněji, c-lipschitzovská), když pro nějakou konstantu $c > 0$ pro každé $x, y \in M$ je $|f(x) - f(y)| \le c|x - y|$. *Rudolf Lipschitz (1832–1903)*, další rodák z Königsbergu, byl německý matematik.

• *Úloha.* Lipschitzovská funkce je stejnoměrně spojitá.

Podle tvrzení 4 v př. 12 pro každou funkci $f \in \mathcal{R}(I)$ a interval $J \subset I$ je i $f \mid J \in \mathcal{R}(J)$. Píšeme jen $f \in \mathcal{R}(J)$ a $\int_J f$.

Věta 1 (ZVA 1) *$I \subset \mathbb{R}$ je netriviální interval, $a \in I$ & $f \in \mathcal{R}(I)$. Pak $F(x) := \int_a^x f$ v $\mathcal{F}(I)$ je lipschitzovská na každém omezeném intervalu $J \subset I$, speciálně $F \in \mathcal{C}$. Je-li f spojitá v bodě $b \in I$, je $F'(b) = f(b)$.*

Důkaz. Nechť I, a, f a J jsou, jak uvedeno. Jak víme, pro nějaké $c > 0$ pro každé $x \in J$ je $|f(x)| \le c$. Ukážeme, že pro každé $x, y \in J$ platí nerovnost $|f(x) - f(y)| \le c|x - y|$, takže na J

funkce f je c-lipschitzovská. Díky aditivitě R. integrálu (tvrzení 4 v př. 12) a ML odhadu (tvrzení 3 v př. 12) platí, že $|F(y) - F(x)| = |\int_a^y f - \int_a^x f| = |\int_a^x f + \int_x^y f - \int_a^x f| = |\int_x^y f| \le c|y - x|$. Rovnost $F'(b) = f(b)$ pro f spojitou v $b \in I$ jsme dokázali ve větě 7 v přednášce 10. □

Věta 2 (ZVA 2) *Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je netriviální interval, $A := \inf(I)$, $B := \sup(I)$, $f \in \mathcal{R}(I)$ a $F = \int f$. Pak existují vlastní limity $F_A := \lim_{x\to A} F(x)$, $F_B := \lim_{x\to B} F(x)$ a*

$$(\mathrm{R}) \int_A^B f = (\mathrm{R}) \int_I f = F_B - F_A = (\mathrm{N}) \int_A^B f\,.$$

Důkaz. Nechť I, A, B, f a F jsou, jak uvedeno, a nechť I je omezený. Búno $I = (a, b)$ s $A = a < b = B$. Protože $f \in \mathcal{R}(a, b)$, existuje $c > 0$, že $|f| \le c$. Podle Lagrangeovy VSH pro každé $x < y$ v (a, b) existuje $\xi \in (x, y)$, že $|F(y) - F(x)| = |f(\xi)| \cdot |y - x| \le c|y - x|$. Takže F je c-lipschitzovská a podle úlohy výše je stejnoměrně spojitá. Podle tvrzení 14 v př. 6 existují uvedené vlastní limity F_a a F_b. Funkci F spojitě rozšíříme hodnotami $F(a) := F_a$, $F(b) := F_b$ a použijeme větu 13 v př. 10 (z jejího důkazu je jasné, že při spojitosti F na $[a, b]$ stačí, že $F = \int f$ platí na (a, b)).

Nechť interval I je neomezený, např. $A = a \in \mathbb{R}$ & $B = +\infty$, a (b_n), $b_n > a$, má $\lim b_n = +\infty$. Pak podle předešlého případu je $\int_a^{b_n} f = F_{b_n} - F_a = F(b_n) - F_a$, takže

$$\int_a^{+\infty} f = \lim \int_a^{b_n} f = \lim(F(b_n) - F_a) = \lim F(b_n) - F_a$$

a $\lim F(b_n) = \int_a^{+\infty} f + F_a$. Podle Heineho definice limity funkce (věta 12 v př. 4) se $\lim_{x\to B} F(x) = \int_a^{+\infty} f + F_a$, takže $\int_a^{+\infty} f = F_B - F_a = F_{+\infty} - F_a$. Pro neomezené intervaly I jiných typů je argument podobný. $\square$

Pomocí ZVA 2 bychom mohli integraci per partes (věta 9 minule) a substitucí (níže) rozšířit i na neomezené intervaly, spokojíme se ale s kompaktními intervaly $[a, b]$.

Integrace substitucí

Věta 3 (substituce v R. $\int$) *Nechť $a < b$, $I := [a, b]$, $G \in \mathcal{F}(I)$, $G' \in \mathcal{C}(I)$, $J := G[I]$ a $f \in \mathcal{C}(J)$. Pak platí rovnost $\int_{G(a)}^{G(b)} f = \int_a^b f(G)G'$.*

Důkaz. Protože $G \in \mathcal{C}(I)$ (tvrzení 3 v př. 7), podle vět 6 a 9 v př. 6 obraz $J = G[I]$ je kompaktní interval. S pomocí věty 5 v př. 10 a tvrzení 4 v př. 12 definujeme funkci $F(x) := \int_{G(a)}^{x} f$, $x \in J$. Pokud G je konstantní a $J = \{c\}$, uvedená rovnost platí triviálně jako $0 = 0$. Nechť J je netriviální. Podle věty 7 v př. 10 je $F = \int f$. Podle věty 17 v př. 7 je $F(G) = \int f(G)G'$. Díky $f(G)G' \in \mathcal{C}(I)$ a větě 5 v př. 10 je $f(G)G' \in \mathcal{R}(I)$. Podle věty 13 v př. 10 (nebo podle ZVA 2) se

$$\int_a^b f(G)G' = \big[F(G)\big]_a^b = F(G(b)) - \overbrace{F(G(a))}^{=0} = \int_{G(a)}^{G(b)} f\,.$$

$\square$

V podstatě to ale je věta o Newtonově integrálu. Větu o substituci přímo pro Riemannův integrál dokázal H. Kestelman až v r. 1961. Uvedeme ji ve vylepšeném tvaru s ekvivalencí pro riemannovskou integrovatelnost. Nalezli ho čeští matematici *David Preiss (1947)* a *Jaromír Uher* (DP a JU, Poznámka k větě o substituci pro Riemannův integrál, *Časopis pěst. mat.* **95** (1970), 345–347).

Věta 4 (D. Preiss a J. Uher, 1970) *Nechť $a < b$, $I := [a,b]$, $g \in \mathcal{R}(I)$, $G(x) := \int_a^x g$ pro $x \in I$, $J := G[I]$ a f v $\mathcal{F}(J)$ je omezená. Pak $f \in \mathcal{R}(J) \iff f(G)g \in \mathcal{R}(I)$. Když ekvivalence platí, platí i rovnost $\int_{G(a)}^{G(b)} f = \int_a^b f(G)g$.*

- *Úloha.* J je opět kompaktní interval. Proč?

Viz `https://eudml.org/doc/19168` (původní článek) nebo nově `https://arxiv.org/abs/1105.5938` či `https://arxiv.org/abs/1904.07446`. Důkaz napíšu v **K**.

Porovnání Riemannova a Newtonova integrálu

Nechť $a < b$ jsou v $\mathbb{R}$ a $I = [a,b]$. Pak $\mathcal{C}(I), \mathcal{R}(I) \subset \mathcal{F}(I)$, ale $\mathcal{N}(a,b) \subset \mathcal{F}((a,b))$. Každou funkci $f \in \mathcal{N}(a,b)$ libovolně dodefinujeme v a i b, abychom měli formálně $\mathcal{N}(a,b) \subset \mathcal{F}(I)$ a mohli tuto množinu porovnávat s $\mathcal{C}(I)$ a $\mathcal{R}(I)$. Je $\mathcal{C}(I) \subset \mathcal{R}(I) \cap \mathcal{N}(a,b)$ (věty 5 a 7 v př. 10). Množiny $\mathcal{R}(I)$ a $\mathcal{N}(a,b)$ jsou neporovnatelné inkluzí: funkce $f_1 = \mathrm{sgn} \,|\, [-1,1]$ má (R) $\int_{-1}^1 f_1 = 0$, ale $f_1 \,|\, (-1,1)$ nemá antiderivaci, a $f_2 = x^{-1/2} \,|\, (0,1)$ má (N) $\int_0^1 f_2 = 2$, ale je neomezená. Oba integrály také nikdy nemají dvě různé hodnoty: když f je v $\mathcal{R}(J)$, kde J je netriviální interval, a má antiderivaci, pak podle ZVA 2 se (R) $\int_J f =$ (N) $\int_{\inf(J)}^{\sup(J)} f$.

Lebesgueova věta

Francouzský matematik *Henri Lebesgue (1875–1941)* v r. 1901 charakterizoval riemannovskou integrovatelnost, viz věta níže.

- *Množiny míry* 0. Pro omezený interval $I \neq \emptyset$ jeho <u>délku</u> definujeme jako $|I| := \sup(I) - \inf(I)$ (≥ 0) a klademe $|\emptyset| := 0$.

Definice 5 *Množina $M \subset \mathbb{R}$ má míru 0, pokud pro každé ε existují omezené intervaly $I_1, I_2, \ldots$, že $M \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} |I_n| \le \varepsilon$.*

• *Úlohy.* (i) $N \subset M$ & M má míru 0 $\Rightarrow N$ má míru 0. (ii) Žádný netriviální interval nemá míru 0. (iii) Když každá z množin M_1, $M_2, \ldots$ má míru 0, pak i $\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$ má míru 0. (iv) Každá nejvýše spočetná podmnožina $\mathbb{R}$ má míru 0. (v) Cantorovo diskontinuum (viz str. 7 v př. 6) je nespočetná množina míry 0.

• *Lebesgueova věta.* Body nespojitosti funkce $f \in \mathcal{F}(M)$ tvoří množinu $\mathrm{BN}(f) := \{b \in M : f \text{ není spojitá v } b\}$ $(\subset M = M(f))$.

Věta 6 (H. Lebesgue, 1901) *Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je omezený interval a $f \in \mathcal{F}(I)$. Potom $f \in \mathcal{R}(I)$, právě když f je omezená a $\mathrm{BN}(f)$ má míru 0.*

Důkaz bude v **K**.

• *Důsledky Lebesgueovy věty.* Lebesgueova věta umožňuje pomocí různých operací získávat nové riemannovsky integrovatelné funkce. V dalším I a J označují neprázdné reálné intervaly.

Důsledek 7 (součet, součin a podíl) *Nechť f, g a h jsou v $\mathcal{R}(I)$ a I je omezený. Pak i $f+g, fg \in \mathcal{R}(I)$. Když existuje $\delta > 0$, že pro každé $x \in I$ je $|h(x)| \ge \delta$, potom i $f/h \in \mathcal{R}(I)$.*

Důkaz. Nechť f, g, h a I jsou, jak uvedeno. Tedy $|f|, |g|, |h| \le c$ pro nějakou konstantu $c > 0$. Pak pro každé $x \in I$ je $|(f+g)(x)| \le |f(x)| + |g(x)| \le 2c$, $|(fg)(x)| \le |f(x)| \cdot |g(x)| \le c^2$

a $|(f/h)(x)| \le |f(x)|/\delta \le \frac{c}{\delta}$. Funkce $f+g$, fg a f/h (s definičním oborem I) jsou tedy omezené. Jak víme, když f, g a h jsou spojité v bodu $b \in I$, pak i $f+g$, fg a f/h jsou spojité v b. Tedy každá z množin $\mathrm{BN}(f+g)$, $\mathrm{BN}(fg)$ a $\mathrm{BN}(f/h)$ je podmnožinou množiny $\mathrm{BN}(f) \cup \mathrm{BN}(g)$, respektive $\mathrm{BN}(f) \cup \mathrm{BN}(h)$, a podle předpokladů, předešlé věty a úlohy výše má míru 0. Podle Lebesgueovy věty jsou tedy funkce $f+g$, fg a f/h riemannovsky integrovatelné. $\square$

- *Úloha.* Pro $f+g$ důsledek platí i pro neomezený interval I.

Ve dvou důsledcích níže g označuje vnitřní funkci a f funkci vnější.

Důsledek 8 (složenina 1) *I a J jsou omezené, $g \in \mathcal{C}(I)$ a je prostá, g^{-1} je c-lipschitzovská, $f \in \mathcal{R}(J)$ a je omezená a $g[I] \subset J$. Potom $f(g) \in \mathcal{R}(I)$.*

Důkaz. Patrně $M(f(g)) = I$ a $f(g)$ je omezená funkce. Máme spojitý inverz $g^{-1} \in \mathcal{F}(g[I])$ (část 2 věty 21 v př. 6). Když pro $b \in I$ je f spojitá v $g(b)$, je $f(g)$ spojitá v b, protože g je spojitá. Tedy $\mathrm{BN}(f(g)) \subset g^{-1}[\mathrm{BN}(f)]$. Použijeme předešlou větu a pro dané ε vezmeme omezené intervaly J_n, $n \in \mathbb{N}$, že $\bigcup_n J_n \supset \mathrm{BN}(f)$ a $\sum_n |J_n| \le \varepsilon$. Uvážíme intervaly $I_n := g^{-1}[J_n]$. Pokud $x, y \in I_n$, pak s $x' = g(x)$ a $y' = g(y)$ v $J_n \cap J$ podle předpokladu máme, že

$$|x-y| = |g^{-1}(x') - g^{-1}(y')| \le c|x'-y'| \le c|J_n|$$

a $|I_n| \le c|J_n|$. Tedy $\mathrm{BN}(f(g)) \subset \bigcup_n I_n$ a $\sum_n |I_n| \le c\varepsilon$. Vidíme, že $\mathrm{BN}(f(g))$ má míru 0. Z Lebesgueovy věty dostáváme, že $f(g)$ je v $\mathcal{R}(I)$. $\square$

- *Úloha.* Uveďte nějakou podmínku pro funkci g, třeba pro její derivaci g', která zajistí lipschitzovskost inverzu g^{-1}.

Důsledek 9 (složenina 2) *I, J jsou omezené, $g \in \mathcal{R}(I)$, $f \in \mathcal{C}(J)$ a je omezená a $g[I] \subset J$. Pak $f(g) \in \mathcal{R}(I)$.*

Důkaz. Patrně $M(f(g)) = I$ a $f(g)$ je omezená funkce. Když g je spojitá v bodu $b \in I$, složená funkce $f(g)$ je také spojitá v b, protože f je spojitá. Tedy $\mathrm{BN}(f(g)) \subset \mathrm{BN}(g)$. Podle předpokladu, Lebesgueovy věty a úlohy výše množina $\mathrm{BN}(f(g))$ má míru 0. Podle Lebesgueovy věty je $f(g) \in \mathcal{R}(I)$. □

Dolní a horní součty a Riemannův integrál

Riemannův integrál jsme definovali limitami Riemannových sum (definice 2 v př. 10) a ε-δ definicí (věta 1 v př. 12). V literatuře je však běžnější definice pomocí dolních a horních součtů, jež zavedl G. Darboux. Za malou chvíli si ji připomeneme. S dolními součty jsme se už setkali v desáté přednášce v definici plochy pod grafem $\mathrm{PG}(f)$. Opět se omezíme na kompaktní intervaly $I = [a, b]$. Funkce $f \in \mathcal{F}(I)$ je libovolná, nepředpokládáme její omezenost, jak je v literatuře (trochu matoucím) zvykem.

• *Dolní a horní součty a integrály.* Je-li $\overline{a} = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$ dělení intervalu $I = [a, b]$ a $f \in \mathcal{F}(I)$, pro $i \in [n]$ definujeme

$$m_i := \inf(\{f(x) :\ x \in [a_{i-1},\, a_i]\}) \ \ (\in \mathbb{R} \cup \{-\infty\})$$

a

$$M_i := \sup(\{f(x) :\ x \in [a_{i-1},\, a_i]\}) \ \ (\in \mathbb{R} \cup \{+\infty\})$$

(infimum a supremum bereme v $(\mathbb{R}^*, <)$). Dolní součet je, jako v definici 14 v př. 10, $s(\overline{a}, f) = \sum_{i=1}^{n}(a_i - a_{i-1})m_i$ $(\in \mathbb{R} \cup \{-\infty\})$ a horní součet je $S(\overline{a}, f) = \sum_{i=1}^{n}(a_i - a_{i-1})M_i$ $(\in \mathbb{R} \cup \{+\infty\})$.

Dolní a horní integrál definujeme po řadě jako

$$\underline{\int_a^b} f := \sup(\{s(\overline{a},\ f) :\ \overline{a} \text{ je dělení intervalu } I\}) \ \ (\in \mathbb{R}^*)$$

a

$$\overline{\int_a^b} f := \inf(\{S(\overline{a},\ f) :\ \overline{a} \text{ je dělení intervalu } I\}) \ \ (\in \mathbb{R}^*)\,.$$

Například není těžké ukázat, že pro $f(x) := (\frac{1}{x} \mid (0,1]) \cup \{(0,0)\}$ se $\underline{\int_0^1} f = \overline{\int_0^1} f = +\infty$.

• *Úlohy.* Když dělení $\overline{a}$ intervalu $I = [a,b]$ zjemňuje dělení $\overline{b}$ a funkce $f \in \mathcal{F}(I)$, pak $s(\overline{b}, f) \le s(\overline{a}, f)$ a $S(\overline{a}, f) \le S(\overline{b}, f)$. Rovněž pro každá dvě dělení $\overline{a}$ a $\overline{b}$ je $s(\overline{a}, f) \le S(\overline{b}, f)$. Konečně je vždy $\underline{\int_a^b} f \le \overline{\int_a^b} f$.

Věta 10 (3. definice R. $\int$) *$a < b$, $I := [a,b]$, $f \in \mathcal{F}(I)$ a $c \in \mathbb{R}$. Potom $\int_a^b f = c$, právě když $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f = c$.*

Důkaz. Nechť I, f a c jsou, jako je uvedeno. Implikace $\Rightarrow$. Nechť $c = \int_a^b f$. Protože f je omezená, všechny dolní i horní součty jsou vlastní. Nechť $A = \underline{\int_a^b} f$ $(\in \mathbb{R} \cup \{+\infty\})$ a je dáno $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2})$. Vezmeme δ, že platí pravá strana ekvivalence ve větě 1 v př. 12. Nechť $\overline{a}$ je dělení intervalu I, že $\|\overline{a}\| \le \delta$ a $s(\overline{a}, f) \in U(A, \varepsilon)$. Pro toto dělení zvolíme body $\overline{t}$ tak, že $|R(\overline{a}, \overline{t}, f) - s(\overline{a}, f)| \le \varepsilon$. Je $|c - R(\overline{a}, \overline{t}, f)| \le \varepsilon$. Tedy $R(\overline{a}, \overline{t}, f) \in U(A, 2\varepsilon)$, $c \in U(A, 4\varepsilon)$ a $\underline{\int_a^b} f = A = c$. Stejně se dokáže, že i $\overline{\int_a^b} f = c$.

Implikace $\neg \Rightarrow \neg$. Dokážeme vlastně, že z $\neg L \wedge P$ plyne spor. Zde L, resp. P, je levá, resp. pravá, strana ekvivalence. Z platnosti $\neg L$ plyne, že existuje ε_0 a posloupnost dělení $(\overline{a_n})$ intervalu I, že $\lim \|\overline{a_n}\| = 0$ a pro každá rozdělení $(\overline{a_n}, \overline{t_n})$ je $|R(\overline{a_n}, \overline{t_n}, f) - c| > \varepsilon_0$.

Z platnosti P plyne, že $|f| \le d$ a že pro každé ε existuje dělení $\overline{a}(\varepsilon)$ intervalu I, že $c-\varepsilon \le s(\overline{a}(\varepsilon), f) \le S(\overline{a}(\varepsilon), f) \le c+\varepsilon$. Z úlohy výše plyne, že pro každé rozdělení $(\overline{b}, \overline{u})$ intervalu I, kde $\overline{b}$ zjemňuje $\overline{a}(\varepsilon)$, je $|R(\overline{b}, \overline{u}, f) - c| \le \varepsilon$.

Pro $\overline{a} := \overline{a}(\varepsilon_0/3) = (a_0, \dots, a_k)$ vezmeme $\overline{b} := \overline{a_n}$ pro tak velké n, že $\|\overline{b}\| \le \|\overline{a}\|$ a $3kd \cdot \|\overline{b}\| \le \varepsilon_0/3$. Vezmeme libovolné rozdělení $(\overline{b}, \overline{u})$ a rozdělení $(\overline{c}, \overline{v})$ definujeme tak, že $\overline{c} := \overline{a} \cup \overline{b}$, pro intervaly $[c_{i-1}, c_i] = [b_{j-1}, b_j]$ je $v_i = u_j$ a pro každý interval $[c_{i-1}, c_i]$, který vznikl z intervalu $[b_{j-1}, b_j]$ rozdělením jedním bodem $a_l \in (b_{j-1}, b_j)$ na dva intervaly, je $v_i \in [c_{i-1}, c_i]$ libovolný.

Posledně zmíněných intervalů je v $\overline{c}$ nejvýše $2k$, takže $\overline{c}$ a $\overline{b}$ se liší v nejvýše $3k$ intervalech a $|R(\overline{c}, \overline{v}, f) - R(\overline{b}, \overline{u}, f)| \le 3kd \cdot \|\overline{b}\| \le \varepsilon_0/3$. Ale $\overline{c}$ zjemňuje $\overline{a}$, takže $|R(\overline{b}, \overline{u}, f) - c| \le |R(\overline{b}, \overline{u}, f) - R(\overline{c}, \overline{v}, f)| + |R(\overline{c}, \overline{v}, f) - c| \le \varepsilon_0/3 + \varepsilon_0/3 = 2\varepsilon_0/3 < \varepsilon_0$. Na druhou stranu však $|R(\overline{b}, \overline{u}, f) - c| > \varepsilon_0$, což je spor. □

Předešlý důkaz implikace $\neg \Rightarrow \neg$ a následující důkaz věty 13 jsou docela zajímavé.

Henstock–Kurzweilův integrál

• *Proč vylepšovat Riemannův integrál?* Protože nedokáže zintegrovat neomezenou derivaci $f' \in \mathcal{F}((a,b))$ funkce $f \in \mathcal{F}((a,b))$. Existují-li vlastní limity $f_a := \lim_{x \to a} f(x)$ a $f_b := \lim_{x \to b} f(x)$, integrál $\int_a^b f'$ podle Riemanna neexistuje, ale podle Newtona se rovná $f_b - f_a$. Viděli jsme to třeba u funkce $f(x) = \sqrt{x} \,|\, (0,1)$.

V r. 1957 český matematik *Jaroslav Kurzweil (1926–2022)* a o něco později anglický matematik *Ralph Henstock (1923–2007)* odstranili tento nedostatek vhodnou úpravou podmínky $\|\overline{a}\| \le \delta$ v ε-δ definici Riemannova integrálu (věta 1 v př. 12). Uvedeme jejich integrál a dokážeme pro něj základní větu.

Kalibry

Nechť $a < b$ & $I := [a, b]$. Kalibrem (na I) rozumíme jakoukoli funkci $\delta_c\colon [a, b] \to (0, +\infty)$. Množinu kalibrů na I označíme jako $\mathcal{K}(I)$. Rozdělení $(\overline{a}, \overline{t})$ intervalu I, kde $\overline{a} = (a_0, \dots, a_n)$, nazveme δ_c-jemným, pokud pro každé $i \in [n]$ je $a_i - a_{i-1} \le \delta_c(t_i)$. Takže pokud $\|\overline{a}\| \le \delta$, rozdělení $(\overline{a}, \overline{t})$ s libovolnými body $\overline{t}$ je δ_c-jemné pro konstantní kalibr $\delta_c = \delta$ $(= k_\delta)$.

Tvrzení 11 (Cousinovo lemma) *$a < b$ & $I := [a, b]$. Pak pro každý kalibr $\delta_c \in \mathcal{K}(I)$ existuje δ_c-jemné rozdělení $(\overline{a}, \overline{t})$ intervalu I. Platí více, každý konečný systém disjunktních intervalů $[a_j, b_j] \subset I$, $j \in J$, s body $t_j \in [a_j, b_j]$ splňujícími $b_j - a_j \le \delta_c(t_j)$ lze doplnit do δ_c-jemného rozdělení intervalu I.*

Důkaz bude v **K**.

H.-K. integrál

Definujeme Henstock–Kurzweilův integrál.

Definice 12 (Henstock–Kurzweilův $\int$) *Nechť $a < b$, $I := [a, b]$ & $f \in \mathcal{F}(I)$. Funkce f je HK-integrovatelná, symbolicky $f \in \mathcal{HK}(a, b)$, a má (HK) $\int_a^b f = c$, pokud pro každé ε existuje kalibr $\delta_c \in \mathcal{K}(I)$, že pro každé δ_c-jemné rozdělení $(\overline{a}, \overline{t})$ intervalu I je $|R(\overline{a}, \overline{t}, f) - c| \le \varepsilon$.*

Tvrzení 11 zaručuje, že tato definice je korektní – kdyby, hypoteticky, existoval kalibr δ_c, pro nějž by neexistovalo δ_c-jemné rozdělení intervalu I, byly by na I všechny funkce HK-integrovatelné s libovolnou hodnotou integrálu.

• *Úloha.* Ukažte, že $\mathcal{R}(a,b) \subset \mathcal{HK}(a,b)$ a že hodnoty obou integrálů se shodují.

Dokážeme, že H.-K. integrál zintegruje každou derivaci.

Věta 13 (H.-K. $\int$ a N. $\int$) *$a < b$, $I := [a,b]$, $F \in \mathcal{C}(I)$, $D(F) \supset (a,b)$ a $f \,|\, (a,b) = F' \,|\, (a,b)$. Pak platí rovnosti*

$$(\mathrm{HK}) \int_a^b f = F(b) - F(a) = (\mathrm{N}) \int_a^b f\,.$$

Důkaz. (J. Lukeš a J. Malý, *Measure and integral*, matfyzpress, Praha 2013, str. 96–97.) Nechť I, F a f jsou, jak uvedeno, a je dáno ε. Kalibr $\delta_c \in \mathcal{K}(I)$ definujeme tak, aby se pro každé δ_c-jemné rozdělení $(\overline{a}, \overline{t})$ intervalu I čísla $F(b) - F(a)$ a $R(\overline{a}, \overline{t}, f)$ málo lišila. Pro $x \in (a,b)$ lze vzhledem k $F' = f$ vzít takovou hodnotu $\delta_c(x) > 0$, že pro $y \in [a,\, b]$ platí implikace

$$y \in U(x,\, \delta_c(x)) \Rightarrow |F(y) - F(x) - f(x)(y-x)| \le \varepsilon|y-x|\,. \quad (*)$$

Pro $x \in \{a,b\}$ můžeme vzít takové hodnoty $\delta_c(a), \delta_c(b) > 0$, že pro každé $y \in [a, a+\delta_c(a))$ a každé $z \in (b-\delta_c(b), b]$ je

$$|f(a)\delta_c(a)|,\ |f(b)\delta_c(b)| \le \varepsilon \wedge |F(y) - F(a)|,\ |F(z) - F(b)| \le \varepsilon\,. \quad (**)$$

Buď dáno δ_c-jemné rozdělení $(\overline{a}, \overline{t})$, $\overline{a} = (a_0, \ldots, a_k)$, intervalu $[a,b]$. Pokud $t_i \in [a_{i-1}, a_i]$ a $t_i \ne a, b$, pak s pomocí Δ-ové nerovnosti je $|F(a_i) - F(a_{i-1}) - f(t_i)(a_i - a_{i-1})| \le |F(a_i) - F(t_i) - f(t_i)(a_i - t_i)| + |F(t_i) - F(a_{i-1}) - f(t_i)(t_i - a_{i-1})| \overset{(*)}{\le} \varepsilon|a_i - t_i| + \varepsilon|t_i - a_{i-1}| = \varepsilon(a_i - a_{i-1})$. Pokud $t_i \in [a_{i-1}, a_i] \cap \{a,b\}$, pak podobně $|F(a_i) - F(a_{i-1}) - f(t_i)(a_i - a_{i-1})| \le |F(a_i) - F(a_{i-1})| +$

$|f(t_i)(a_i - a_{i-1})| \overset{(**)}{\leq} 2\varepsilon$, protože $i = 1 \wedge t_1 = a$ nebo $i = k \wedge t_k = b$. Dohromady podle Δ-ové nerovnosti se $|F(b) - F(a) - R(\overline{a}, \overline{t}, f)|$ rovná nejvýše

$$\textstyle\sum_{i=1}^{k} |F(a_i) - F(a_{i-1}) - (a_i - a_{i-1})f(t_i)| \leq \varepsilon(b-a) + 4\varepsilon\,,$$

jak jsme slíbili. Takže (HK) $\int_a^b f = F(b) - F(a)$. $\square$

- *Úloha.* (HK) $\int_0^1 1/\sqrt{x} = ?$

H.-K. integrál nejen takto podstatně rozšiřuje integrál Riemannův, ale pochopitelně má i další pěkné vlastnosti, které integrály musejí mít, jako je linearita atd. Podrobně o něm informuje kniha Š. Schwabik, *Integrace v* $\mathbb{R}$ *(Kurzweilova teorie)*, Karolinum, Praha 1999.

DĚKUJI ZA POZORNOST!