Martin Klazar

MA 1, PŘEDNÁŠKA 7, 30. 3. 2023

DERIVACE FUNKCÍ

• *Derivace funkcí* leží v základech analýzy. Setkáváme se s nimi ale i mimo matematiku, hlavně ve fyzice. Často se derivace funkce v bodu zavádí jen pro funkce definované na jeho okolí. My se vydáme obecnější cestou.

Definice 1 (derivace funkce v bodu) *Nechť $a \in M$ je limitní bod množiny $M \subset \mathbb{R}$ a $f\colon M \to \mathbb{R}$ je funkce. Definujeme*

$$f'(a) = \frac{df}{dx}(a) := \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \stackrel{(*)}{=} \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

a řekneme, že tato limita $f'(a) = \frac{df}{dx}(a) \in \mathbb{R}^*$ je derivace funkce f v bodě a.

• *Úloha.* Dokažte rovnost $(*)$.

Je-li derivace f v bodu a vlastní, tj. $f'(a) \in \mathbb{R}$, řekneme také, že funkce f je v a *diferencovatelná*. Pak pro $x \in M$ platí aproximace

$$f(x) = \underbrace{f(a) + f'(a) \cdot (x - a)}_{\text{lineární přiblížení k } f} + \underbrace{o((x - a))}_{\text{jeho chyba}} \ \ (x \to a)\ .$$

Později tuto lineární aproximaci zpřesníme polynomiálními aproximacemi.

• *Jednostranné derivace.* Definujeme je pomocí jednostranných limit.

Definice 2 (jednostranné derivace) *Nechť je $a \in M$ levý, resp. pravý, limitní bod množiny $M \subset \mathbb{R}$, a $f\colon M \to \mathbb{R}$ je funkce. Definujeme*

$$f'_{-}(a) := \lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \overset{(*)}{=} \lim_{h \to 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}\ ,$$

resp.

$$f'_{+}(a) := \lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \overset{(*)}{=} \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}\ ,$$

a řekneme, že $f'_{-}(a) \in \mathbb{R}^*$, resp. $f'_{+}(a) \in \mathbb{R}^*$, je derivace funkce f v bodě a zleva, resp. zprava.

- *Úloha.* Dokažte rovnosti $(*)$.
- *Úlohy.* $f'(a) = L \in \mathbb{R}^* \Rightarrow f'_{-}(a) = L$ nebo $f'_{+}(a) = L$. $f'_{-}(a) = f'_{+}(a) = L \in \mathbb{R}^* \Rightarrow f'(a) = L$. $f'_{-}(a) \neq f'_{+}(a) \Rightarrow \neg\exists\, f'(a)$.
- *Derivace a extrémy.* Zavedeme speciální druh limitních bodů.

Definice 3 (OLB) *Bod $a \in M$ je oboustranný limitní bod množiny $M \subset \mathbb{R}$, krátce* OLB, *pokud*

$$\forall\, \delta \left(P^-(a,\, \delta) \cap M \neq \emptyset \neq P^+(a,\, \delta) \cap M\right)\ .$$

Nalevo i napravo od a jsou libovolně blízko body z množiny M.

- *Úlohy.* Každý OLB množiny M je jejím limitním bodem, ale naopak to obecně neplatí.

Následující populární výsledek o derivacích uvedeme obecněji, než je obvyklé.

Věta 4 (nutná podmínka extrému) *Nechť $b \in M$ je OLB $M \subset \mathbb{R}$, $f\colon M \to \mathbb{R}$, $\exists\, f'(b) \in \mathbb{R}^*$ a $f'(b) \neq 0$. Pak*

$$\forall\, \delta\ \exists\, c,\, d \in U(b,\, \delta) \cap M\ \big(f(c) < f(b) < f(d)\big)$$

– funkce f nemá v bodě b lokální extrém, nemá v b ani lokální minimum ani lokální maximum.

Důkaz. Nechť b, M a f jsou, jak je uvedeno, a je dáno δ. Nechť $f'(b) < 0$, případ s $f'(b) > 0$ je podobný. Vezmeme tak malé ε, že $U(f'(b), \varepsilon) < \{0\}$ (tj. $y \in U(f'(b), \varepsilon) \Rightarrow y < 0$). Nyní podle definice 1 existuje takové θ, že

$$x \in P(b,\, \theta) \cap M \Rightarrow \frac{\overbrace{f(x) - f(b)}^{\text{toto je} < 0}}{x - b} \in U(f'(b),\, \varepsilon)\ .$$

Tedy když $x \in P^-(b, \theta) \cap M$, pak $f(x) > f(b)$, protože $x - b < 0$ a hořejší zlomek je záporný. Podobně když $x \in P^+(b, \theta) \cap M$, pak $f(x) < f(b)$. Můžeme předpokládat, že $\theta \leq \delta$, a vzít jakékoli

$$c \in P^+(b,\, \theta) \cap M \ \text{ a } \ d \in P^-(b,\, \theta) \cap M\ .$$

Oba prvky c a d existují díky tomu, že b je OLB množiny M. Takže $c, d \in U(b, \delta) \cap M \Rightarrow f(c) < f(b)$ a $f(d) > f(b)$. □

• *Úloha.* Funkce $f(x) = x\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ má v 0 ostré globální minimum a v 1 ostré globální maximum a hodnoty derivace $f'(0) = f'(1) = 1 \neq 0$. Není to v rozporu s větou?

Věta říká: $f\colon M \to \mathbb{R}$ má v $b \in M$ lokální extrém $\Rightarrow$ (i) b není OLB M nebo (ii) $\neg\exists\, f'(b)$ nebo (iii) $f'(b) = 0$. Lokální extrémy funkce f má tedy smysl hledat jen v množině $\{b \in M \mid \text{(i)} \vee \text{(ii)} \vee \text{(iii)}\}$.

• *Derivace a spojitost.* Existence vlastní derivace funkce v daném bodě je silnější vlastnost, než její spojitost v tomto bodě.

Tvrzení 5 (derivace a spojitost) *Nechť $b \in M \subset \mathbb{R}$, b je limitní bod M a $f\colon M \to \mathbb{R}$. Má-li f vlastní derivaci $f'(b) \in \mathbb{R}$, je f v bodě b spojitá. Totéž pro jednostranné derivace a odpovídající jednostranné spojitosti.*

Důkaz. Z předpokladů dostáváme pomocí AL funkcí, že

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to b} f(x) &= \lim_{x\to b}\left(f(b) + (x-b)\cdot\frac{f(x)-f(b)}{x-b}\right)\\
&= \lim_{x\to b} f(b) + \lim_{x\to b}(x-b)\cdot\lim_{x\to b}\frac{f(x)-f(b)}{x-b}\\
&= f(b) + 0\cdot f'(b) = f(b)\;.
\end{aligned}$$

Podle tvrzení 5 v páté přednášce je f v b spojitá. Stejný výpočet funguje pro jednostranné derivace, limity a spojitosti. $\square$

• *Úloha.* Dokažte, že $\mathrm{sgn}'(0) = +\infty$. Existence nevlastní derivace neimplikuje spojitost funkce v daném bodě.

• *Úloha.* Dokažte, že $(|x|)'_-(0) = -1$ a $(|x|)'_+(0) = +1$. Takže $\neg\exists\,(|x|)'(0)$. Spojitost funkce v bodu nezaručuje existenci derivace.

• *Pár derivací.* Zderivujeme odmocninu $\sqrt{x}\colon [0, +\infty) \to [0, +\infty)$. Nechť $a > 0$. Pak

$$\begin{aligned}
(\sqrt{x})'(a) &= \lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{x-a}{(x-a)(\sqrt{x}+\sqrt{a})}\\
&= \lim_{x\to a}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}} = \frac{1}{2\sqrt{a}}\;.
\end{aligned}$$

Poslední rovnost platí díky AL funkcí.

- *Úloha.* Dokažte, že $(\sqrt{x})'(0) = (\sqrt{x})'_+(0) = +\infty$ (nevlastní derivace není na překážku spojitosti) a že hodnota $(\sqrt{x})'_-(0)$ není definovaná.
- *Úloha.* Dokažte, že derivace konstantní funkce je všude nulová.

> **Tvrzení 6 ($(x^n)'$)** *Pro každé $n \in \mathbb{N}$ a každé $a \in \mathbb{R}$ platí, že $(x^n)'(a) = na^{n-1}$.*

Důkaz. Nechť $n \in \mathbb{N}$ a $a \in \mathbb{R}$. Pak

$$\begin{aligned}
(x^n)'(a) &= \lim_{x\to a} \frac{x^n - a^n}{x - a} \\
&= \lim_{x\to a} \frac{(x-a)(x^{n-1} + x^{n-2}a + \cdots + a^{n-1})}{x - a} \\
&= \lim_{x\to a} (x^{n-1} + x^{n-2}a + \cdots + a^{n-1}) \\
&= \underbrace{a^{n-1} + a^{n-1} + \cdots + a^{n-1}}_{n \text{ sčítanců}} = na^{n-1} .
\end{aligned}$$

Předposlední rovnost platí díky AL funkcí. □

- *Derivace jako funkce.* Z jednotlivých hodnot derivace dané funkce f sestavíme novou funkci f'.

> **Definice 7 (derivace funkce)** *Nechť $f\colon M \to \mathbb{R}$ pro $M \subset \mathbb{R}$. Derivace funkce f je funkce $g\colon D(f) \to \mathbb{R}$, kde $D(f) \subset M$ je množina*
>
> $$\{b \in M \mid b \text{ je LB } M \wedge \exists\, f'(b) \in \mathbb{R}\} \quad a \quad g(b) := f'(b) .$$
>
> *Tuto funkci g značíme jako f'.*

Např. pro $\sqrt{x}\colon [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ je $(\sqrt{x})'\colon (0,+\infty) \to \mathbb{R}$. Podle tvrzení 5 je každá funkce $f\colon M \to \mathbb{R}$ spojitá na $D(f)$. Musí ale sama derivace $f'\colon D(f) \to \mathbb{R}$ být spojitá? Nemusí.

- *Úloha.* Dokažte následující tvrzení.

Tvrzení 8 (nespojitá derivace) *Funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kde $f(x) := x^2 \sin(1/x)$ pro $x \ne 0$ a $f(0) := 0$, je spojitá a má všude definovanou derivaci $f'\colon D(f) = \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,*

$$f'(x) = \begin{cases} 2x\sin(1/x) - \cos(1/x) & \ldots \quad x \ne 0 \quad a \\ 0 & \ldots \quad x = 0\,, \end{cases}$$

jež je nespojitá v 0.

- *Tečny.* V této více geometrické pasáži uvedeme až tři definice tečny ke grafu funkce $f\colon M \to \mathbb{R}$. To je množina bodů v rovině

$$G_f := \{(x,\, f(x)) \mid x \in M\} \subset \mathbb{R}^2\,,$$

ale podle naší definice funkce se f a G_f prakticky rovnají.

Definice 9 (tečny, první) *Nechť $a \in M \subset \mathbb{R}$, a je limitní bod množiny M a $f\colon M \to \mathbb{R}$ je diferencovatelná v a. Tečnou ke grafu funkce f v bodě $(a, f(a)) \in G_f$ rozumíme přímku*

$$\ell\colon y = f'(a)\cdot(x-a) + f(a)\,.$$

Je to jediná přímka se sklonem $f'(a)$ procházející bodem $(a, f(a))$.

Pro druhou definici tečny zavedeme pár definic. *Přímka* jdoucí dvěma různými body $(a,b),(a',b') \in \mathbb{R}^2$ je množina

$$\kappa(a,\, b,\, a',\, b') := \{(a,\, b) + t \cdot (a'-a,\, b'-b) \mid t \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2\,. \quad (\kappa)$$

• *Úloha.* Pro přímku $\lambda \subset \mathbb{R}^2$ a dva různé body $(a,b),(a',b') \in \mathbb{R}^2$ platí, že

$$\lambda = \kappa(a,\, b,\, a',\, b') \iff (a,\, b) \in \lambda \wedge (a',b') \in \lambda\,.$$

Pro každou přímku je v každé její reprezentaci (κ) buď vždy $a = a'$, anebo vždy $a \neq a'$. První přímky jsou *svislé* a druhé *nesvislé*. Nechť $M \subset \mathbb{R}$. *Sečna* grafu G_f funkce $f\colon M \to \mathbb{R}$ je každá přímka

$$\kappa(x,\, f(x),\, x',\, f(x')),\ \text{kde } x, x' \in M \text{ a } x \neq x'\,.$$

Sečny jsou nesvislé. Pro daný význačný bod $(a, f(a)) \in G_f$ *hlavní* sečny procházejí jím a dalším *vedlejším* bodem grafu G_f. Zbývající sečny grafu G_f jsou *nehlavní.*

Každé dvojici $(s,b) \in \mathbb{R}^2$ přiřadíme množinu

$$\ell(s,\, b) := \{(x,\, sx+b) \mid x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2 \qquad (\ell)$$

se *sklonem* s.

• *Úloha.* Dokažte, že (i) každá množina $\ell(s,b)$ je nesvislá přímka, že (ii) každá nesvislá přímka je tvaru (ℓ) a že (iii) pro každou nesvislou přímku κ existuje právě jedna dvojice $(s,b) \in \mathbb{R}^2$, že $\kappa = \ell(s,b)$.

Zobrazení

$$(s,\, b) \mapsto \ell(s,\, b),\ \text{viz } (\ell)\,,$$

je tedy bijekce z $\mathbb{R}^2$ do množiny všech nesvislých přímek. Sklon nesvislé přímky je tak jednoznačně určený.

• *Úloha.* Odvoďte pro sklon s nesvislé přímky $\kappa(a,\, b,\, a',\, b')$ vzorec $s = (b' - b)/(a' - a)$.

Definice 10 (limity přímek) *Nechť ℓ je nesvislá přímka a (ℓ_n) je posloupnost nesvislých přímek. Když jejich (ℓ)-reprezentace $\ell = \ell(s, b)$ a $\ell_n = \ell(s_n, b_n)$ splňují vztahy*

$$\lim\, s_n = s \wedge \lim\, b_n = b\ ,$$

píšeme $\lim\, \ell_n = \ell$ *a řekneme, že přímky (ℓ_n) mají limitu ℓ.*

• *Úloha.* Dokažte, že limita přímek je jednoznačná.

Definice 11 (tečny, druhá) *Nechť $a \in M \subset \mathbb{R}$, a je limitní bod množiny M, $f\colon M \to \mathbb{R}$ a nechť ℓ je nesvislá přímka. Pokud pro $\forall\,(x_n) \subset M \setminus \{a\}$ s $\lim x_n = a$ platí podle definice 10, že*

$$\lim\, \kappa(a,\, f(a),\, x_n,\, f(x_n)) = \ell\ ,$$

nazveme ℓ tečnou ke grafu funkce f v bodě $(a, f(a)) \in G_f$.

Tečna v $(a, f(a))$ je v definici 11 limita každé posloupnosti hlavních sečen grafu s vedlejšími body jdoucími v limitě k $(a, f(a))$. Je to rigorózní definice tečny bez použití hodnoty derivace $f'(a)$.

• *Úloha.* Dokažte, že když ℓ je tečna ke G_f v bodě $(a, f(a))$ podle definice 11, pak $(a, f(a)) \in \ell$, tj. ℓ bodem prochází.

Věta 12 (def. 11 $\iff$ def. 9) *Nechť $a \in M \subset \mathbb{R}$, a je limitní bod množiny M, $f\colon M \to \mathbb{R}$ a ℓ je nesvislá přímka. Dvě následující tvrzení jsou ekvivalentní.*

1. *ℓ je tečna ke G_f v bodě $(a, f(a))$ podle definice 11.*
2. *$\exists\, f'(a) \in \mathbb{R}$ a $\ell = \ell(f'(a),\ f(a) - a \cdot f'(a))$, takže ℓ je tečna ke G_f v bodě $(a, f(a))$ podle definice 9.*

Důkaz. Nechť a, M, f a ℓ jsou, jak uvedeno.

Implikace 1 $\Rightarrow$ 2. Předpokládáme, že ℓ je tečna ke G_f v bodě $(a, f(a))$ podle definice 11. Nechť $(x_n) \subset M \setminus \{a\}$ je libovolná posloupnost s $\lim x_n = a$, nechť $\kappa_n := \kappa(a, f(a), x_n, f(x_n))$ a nechť s_n je sklon sečny κ_n. Podle předpokladu je $\lim \kappa_n = \ell$, takže podle vzorečku pro sklon je

$$\lim \frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a} = \lim s_n = s\ ,$$

kde s je sklon přímky ℓ. Podle Heineho definice limity funkce a definice 1 máme, že $f'(a) = s$. Výše jste dokázali, že tečna ℓ jde bodem $(a, f(a))$, tudíž

$$\ell = \ell(s,\ f(a) - a \cdot s) = \ell(f'(a),\ f(a) - a \cdot f'(a))\ .$$

Implikace 1 $\Leftarrow$ 2. Předpokládáme, že existuje $f'(a) \in \mathbb{R}$ a že ℓ je dána uvedeným vzorcem. Nechť $(x_n) \subset M \setminus \{a\}$ je libovolná posloupnost s $\lim x_n = a$. Podle předpokladu a Heineho definice limity funkce je

$$\lim \underbrace{\frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a}}_{s_n} = f'(a)\ .$$

Zlomek s_n je sklon hlavní sečny $\kappa_n := \kappa(a, f(a), x_n, f(x_n)) = \ell(s_n, f(a) - s_n a)$. Tyto sečny tedy mají limitu

$$\lim \kappa_n = \ell(f'(a),\ f(a) - f'(a) \cdot a) = \ell\ .$$

Tedy ℓ je tečnou ke G_f v bodě $(a, f(a))$ podle definice 11. $\square$

Věta 13 (třetí def. tečny) *Nechť* $a \in M \subset \mathbb{R}$, *$a$ je* OLB *množiny M, $f\colon M \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ a ℓ je nesvislá přímka. Dvě následující tvrzení jsou ekvivalentní.*

1. *f lze rozšířit do funkce $g\colon M \to \mathbb{R}$ tak, že ℓ je tečna ke G_g v bodě $(a, g(a))$.*
2. $\forall\, (x_n), (y_n) \subset M \setminus \{a\}$ *splňující, že* $\forall\, n \big(x_n < a < y_n\big)$ & $\lim x_n = \lim y_n = a$, *se podle definice 10 limita přímek* $\lim \kappa(x_n,\ f(x_n),\ y_n,\ f(y_n)) = \ell$.

Důkaz je v **K**. Část 2 říká, že ℓ je limitou každé posloupnosti takových nehlavních sečen grafu, že jsou určené dvojicemi bodů jdoucími k bodu $(a, g(a))$, který body v každé dvojici odděluje. Je to tečna v neexistujícím bodě $(a, f(a)) \notin G_f$ grafu funkce f!

- *Aritmetika derivací.* Podíváme se na derivaci násobku a součtu.

Tvrzení 14 (derivace násobku) *Nechť* $a \in M \subset \mathbb{R}$, *$a$ je limitní bod množiny M, $f\colon M \to \mathbb{R}$, $L \in \mathbb{R}^*$ a $b \neq 0$. Pak*

$$f'(a) = L \Rightarrow (bf)'(a) = bL\ .$$

Důkaz. $(bf)'(a) = \lim_{x \to a} \frac{bf(x) - bf(a)}{x - a} = b \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = bf'(a)$ podle AL funkcí. $\square$

• *Úloha.* Ukažte, že v předešlém tvrzení platí i opačná implikace.

Tvrzení 15 (derivace součtu) *Nechť $a \in M \subset \mathbb{R}$, a je limitní bod množiny M a $f, g\colon M \to \mathbb{R}$. Když $f'(a) \in \mathbb{R}^*$, $g'(a) \in \mathbb{R}^*$ a výraz $f'(a) + g'(a)$ není neurčitý, pak platí rovnost*
$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)\ .$$

Důkaz. Nechť $h := f + g$. Podle AL funkcí je
$$\begin{aligned} h'(a) &= \lim_{x\to a} \frac{h(x)-h(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} + \lim_{x\to a} \frac{g(x)-g(a)}{x-a} \\ &= f'(a) + g'(a)\ . \end{aligned}$$

□

Například na definičním oboru $[0, +\infty)$ se
$$(\mathrm{sgn}(x) + \sqrt{x})'(0) = \mathrm{sgn}'(0) + (\sqrt{x})'(0) = +\infty + (+\infty) = +\infty\ .$$

• *Úloha.* $(\mathrm{sgn}(x) - \sqrt{x})'(0) = ?$

Přejdeme k derivacím součinu a podílu

Věta 16 (Leibnizův vzorec) *Nechť $b \in M \subset \mathbb{R}$, b je limitní bod množiny M, $f, g\colon M \to \mathbb{R}$ a f nebo g je spojitá v b. Pak*
$$(fg)'(b) = f'(b) \cdot g(b) + f(b) \cdot g'(b)\ ,$$
když pravá strana není neurčitý výraz.

Důkaz. Nechť je g spojitá v b, druhý případ s f je symetrický.

Podle předpokladů a podle AL funkcí je

$$\begin{aligned}
(fg)'(b) &= \lim_{x\to b} \frac{f(x)g(x) - f(b)g(b)}{x-b} \\
&= \lim_{x\to b} \frac{(f(x)-f(b))g(x) + f(b)(g(x)-g(b))}{x-b} \\
&= \lim_{x\to b} \frac{f(x)-f(b)}{x-b} \cdot \lim_{x\to b} g(x) + f(b) \lim_{x\to b} \frac{g(x)-g(b)}{x-b} \\
&\overset{g \text{ je spoj. v } b}{=} f'(b)g(b) + f(b)g'(b)\ .
\end{aligned}$$

□

- *Úloha.* Předpoklad spojitosti se nedá pominout. Uvažte funkce $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kde

$$f(x) = -g(x) := \operatorname{sgn} x \ \text{ pro } \ x \neq 0,\ f(0) := -\tfrac{1}{2} \ \text{ a } \ g(0) := \tfrac{1}{2}\ .$$

Ukažte, že pro $b = 0$ pravá strana Leibnizova vzorce je $(+\infty) \cdot \frac{1}{2} + (-\frac{1}{2}) \cdot (-\infty) = +\infty$, ale levá neexistuje.

Tvrzení 17 (derivace podílu) *Nechť $b \in M \subset \mathbb{R}$, b je limitní bod množiny M a $f, g\colon M \to \mathbb{R}$ jsou funkce. Když $g(b) \neq 0$ a g je spojitá v b, pak*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(b) = \frac{f'(b)\cdot g(b) - f(b)\cdot g'(b)}{g(b)^2}\ ,$$

není-li výraz na pravé straně neurčitý.

Důkaz. Předpoklady a AL funkcí dávají, že

$$
\begin{aligned}
&(f/g)'(b) = \lim_{x\to b}\frac{(f(x)/g(x)) - (f(b)/g(b))}{x-b} = \\
&\lim_{x\to b}\frac{f(x)g(b) - f(b)g(b) + f(b)g(b) - f(b)g(x)}{g(x)g(b)(x-b)} = \\
&\lim_{x\to b}\frac{f(x)-f(b)}{x-b}\lim_{x\to b}\frac{g(b)}{g(x)g(b)} - \lim_{x\to b}\frac{f(b)}{g(x)g(b)}\lim_{x\to b}\frac{g(x)-g(b)}{x-b} \\
&\overset{g \text{ je spoj. v } b}{=} \frac{f'(b)g(b) - f(b)g'(b)}{g(b)^2}\ .
\end{aligned}
$$

□

Podobný příklad jako v poslední úloze ukazuje, že vzorec pro derivaci podílu obecně neplatí pro g nespojitou v b.

• *Derivace složené funkce a derivace inverzu.* Pro důkazy dvou následujících vět odkazujeme do **K**.

Věta 18 (derivace složené funkce) *Nechť $a \in M \subset \mathbb{R}$, a je limitní bod množiny M, $g\colon M \to N$ je spojitá v a, s derivací $g'(a) \in \mathbb{R}^*$ a taková, že $g(a) \in N$ je limitní bod množiny $N \subset \mathbb{R}$, a nechť $f\colon N \to \mathbb{R}$ je funkce s derivací $f'(g(a)) \in \mathbb{R}^*$. Pak složená funkce $f(g)\colon M \to \mathbb{R}$ má derivaci*

$$(f(g))'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a)\ ,$$

není-li součin neurčitý, tj. není ani $0 \cdot (\pm\infty)$ ani $(\pm\infty) \cdot 0$.

Nechť $M \subset \mathbb{R}$. Funkce $f\colon M \to \mathbb{R}$ *roste*, resp. *klesá, v bodě* $a \in M$, pokud existuje δ, že

$$x \in P^-(a, \delta) \cap M,\ x' \in P^+(a, \delta) \cap M \Rightarrow f(x) < f(a) < f(x')\ ,$$

resp. platí opačné nerovnosti. Tady je naše verze věty o derivaci inverzní funkce. Je pro derivace podle definice 1.

Věta 19 (derivace inverzu) *Nechť $a \in M \subset \mathbb{R}$, a je limitní bod množiny M, $f\colon M \to \mathbb{R}$ je prostá funkce s derivací $f'(a) \in \mathbb{R}^*$ a inverzní funkce $f^{-1}\colon f[M] \to M$ je spojitá v $b := f(a)$. Potom platí následující.*

1. *Když $f'(a) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, pak f^{-1} má derivaci*

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}\ .$$

2. *Když $f'(a) = 0$ a f roste, resp. klesá, v bodě a, pak f^{-1} má derivaci*

$$(f^{-1})'(b) = +\infty,\ \textit{resp. } (f^{-1})'(b) = -\infty\ .$$

3. *Když $f'(a) = \pm\infty$ a b je limitní bod množiny $f[M]$, pak f^{-1} má derivaci*

$$(f^{-1})'(b) = 0\ .$$

• *Tabulka derivací elementárních funkcí.* Uvedeme vzorce pro tyto derivace. Pár jsme jich už dokázali. Důkazy jsou/budou v **K**.

Věta 20 (tabulka derivací) *Platí následující derivace.*

1. *Na* $\mathbb{R}$ *se* $\exp(x)' = \exp(x)$, $(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$, $(\arctan x)' = 1/(1+x^2)$, $(\operatorname{arccot} x)' = -1/(1+x^2)$, $(x^n)' = nx^{n-1}$ *pro* $n \in \mathbb{N}$ *a* $c' = 0$ *pro každé* $c \in \mathbb{R}$.
2. *Na* $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ *se* $(x^b)' = bx^{b-1}$ *pro záporné* $b \in \mathbb{Z}$.
3. *Na* $(0, +\infty)$ *se* $(x^b)' = bx^{b-1}$ *pro* $b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ *a* $(\log x)' = 1/x$.
4. *Na* $\mathbb{R} \setminus \{k\pi + \pi/2 \mid k \in \mathbb{Z}\}$ *se* $(\tan x)' = 1/(\cos x)^2$.
5. *Na* $\mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ *se* $(\cot x)' = -1/(\sin x)^2$.
6. *Na* $(-1, 1)$ *se* $(\arcsin x)' = 1/\sqrt{1-x^2}$ *a* $(\arccos x)' = -1/\sqrt{1-x^2}$.

DĚKUJI ZA POZORNOST!