Martin Klazar

MA 1, PŘEDNÁŠKA 3, 2. 3. 2023

VLASTNOSTI LIMIT REÁLNÝCH POSLOUPNOSTÍ

Minule jsme se zabývali existencí limit reálných posloupností. Dnes prozkoumáme limity v souvislosti s aritmetickými operacemi $+$, $\cdot$, $/$ na $\mathbb{R}^*$ a lineárním uspořádáním $<$ na $\mathbb{R}^*$. V závěru definujeme nekonečné řady reálných čísel a jejich součty. Pomocí (a_n), (b_n) a (c_n) označujeme reálné posloupnosti a $\mathbb{R}^*$ je rozšířená reálná osa — budeme počítat s nekonečny.

- *Úloha.* Dokažte obměnu trojúhelníkové nerovnosti:

$$\forall\, a\, \forall\, b \left(|a-b| \ge |a| - |b|\right) .$$

- *Úloha.* $\lim a_n = a \iff \exists\,(e_n)\,\big(a_n = a + e_n \wedge \lim e_n = 0\big)$.
- *Aritmetika limit posloupností.* Limity často počítáme takto.

Věta 1 (aritmetika limit) *Nechť $(a_n),(b_n) \subset \mathbb{R}$ mají limity $\lim a_n = K \in \mathbb{R}^*$, $\lim b_n = L \in \mathbb{R}^*$ a výraz $K+L$, resp. KL, resp. K/L není neurčitý. Pak, po řadě,*

$$\lim(a_n+b_n) = K+L,\ \lim a_n b_n = KL \ \text{ a } \ \lim\, a_n/b_n = K/L\ .$$

Důkaz. Předpokládáme, že $K, L \in \mathbb{R}$. Případy s $K = \pm\infty$ nebo $L = \pm\infty$ necháváme do úloh.

1 (+). Buď dáno ε. Existuje n_0, že $n \ge n_0 \Rightarrow a_n = K + c_n$ a $b_n = L + d_n$ s $|c_n|, |d_n| \le \frac{\varepsilon}{2}$. Tedy

$$n \ge n_0 \Rightarrow a_n + b_n = K + L + \overbrace{c_n + d_n}^{e_n}$$

a $|e_n| \le |c_n| + |d_n| \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Takže $a_n + b_n \to K + L$.

2 $(\cdot)$. Buď dáno $\varepsilon \in (0,1)$. Existuje n_0, že $n \geq n_0 \Rightarrow a_n = K + c_n$ a $b_n = L + d_n$ s $|c_n|, |d_n| \leq \varepsilon$. Tedy

$$n \geq n_0 \Rightarrow a_n b_n = KL + \overbrace{c_n L + d_n K + c_n d_n}^{e_n}$$

a $|e_n| \leq \varepsilon|L| + \varepsilon|K| + \varepsilon^2 \leq \varepsilon(|K| + |L| + 1)$, což $\to 0$ pro $\varepsilon \to 0$. Takže $a_n b_n \to KL$.

3 $(/)$. Nechť $L \neq 0$ a je dáno ε. Existuje n_0, že $n \geq n_0 \Rightarrow a_n = K + c_n$ a $b_n = L + d_n$ s $|c_n| \leq \varepsilon$ a $|d_n| \leq \min(\varepsilon, \frac{|L|}{2})$. Pak $n \geq n_0 \Rightarrow$

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{K + c_n}{L + d_n} = \frac{K/L + c_n/L}{1 + d_n/L} = \frac{K}{L} \overbrace{- \frac{K d_n/L^2}{1 + d_n/L} + \frac{c_n/L}{1 + d_n/L}}^{e_n} .$$

Podle úlohy výše je $|1 + d_n/L| \geq 1 - |d_n|/|L| \geq 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Tedy

$$|e_n| \leq \frac{|K|\varepsilon/L^2}{1/2} + \frac{\varepsilon/|L|}{1/2} = \varepsilon \cdot \frac{2(|K| + |L|)}{L^2} ,$$

což $\to 0$ pro $\varepsilon \to 0$. Takže $a_n/b_n \to K/L$. $\square$

- *Úlohy.* Dokažte tři předešlé vzorce pro $K = \pm\infty$ a/nebo $L = \pm\infty$.

Věta nezachycuje aritmetiku limit úplně. I když předpoklady nejsou splněné, tedy (a_n) nebo (b_n) nemá limitu nebo příslušný výraz $K + L$, KL či K/L je neurčitý, stále může existovat jednoznačná výsledná limita. Několik takových případů teď uvedeme.

- *Úlohy.* Dokažte následující tvrzení.

Tvrzení 2 (dodatek 1 k AL) *Platí následující.*

1. (a_n) *omezená a* $\lim b_n = \pm\infty =: L \Rightarrow \lim(a_n + b_n) = L$.
2. (a_n) *omezená a* $\lim b_n = 0 \Rightarrow \lim a_n b_n = 0$.
3. $a_n > c > 0$ *pro* $n \ge n_0$ *a* $\lim b_n = \pm\infty =: L \Rightarrow \lim a_n b_n = L$. *Podobně* $a_n < c < 0 \ldots$
4. (a_n) *omezená a* $\lim b_n = \pm\infty \Rightarrow \lim a_n/b_n = 0$.
5. $a_n > c > 0$ *a* $b_n > 0$ *pro* $n \ge n_0$ *a* $\lim b_n = 0 \Rightarrow \lim a_n/b_n = +\infty$. *Podobně* $a_n < c < 0$ *a* $b_n > 0 \ldots$

• *Úlohy.* Dokažte následující tvrzení. Říká, že když je $K + L$, KL či K/L neurčitý výraz, výsledná limita může být cokoli.

Tvrzení 3 (dodatek 2 k AL) $\forall A \in \mathbb{R}^* \;\exists (a_n) \;\exists (b_n)$, *že*

1. $\lim a_n = +\infty$, $\lim b_n = -\infty$ *a* $\lim(a_n + b_n) = A$.
2. $\lim a_n = 0$, $\lim b_n = \pm\infty$ *a* $\lim a_n b_n = A$.
3. $\lim a_n = \lim b_n = 0$ *nebo* $\lim a_n = \pm\infty$, $\lim b_n = \pm\infty$ *a* $\lim a_n/b_n = A$.

Tři výsledné limity také nemusí existovat.

• *Rekurentní posloupnosti.* Jejich limity jsou vlastně první opravdové limity posloupností, dosavadní příklady jako $\lim(n^{1/3} - n^{1/2})$, $\lim \frac{2n-3}{5n+4}$ apod. jsou ve skutečnosti úlohy na limity funkcí. Počítání limit rekurentních posloupností je vysvětlené v důkazu následujícího tvrzení a podrobněji v **K**.

• *Úloha (AG nerovnost).* Je to nerovnost mezi aritmetickým a geometrickým průměrem. Pro každá dvě čísla $a, b \geq 0$ je

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}\ .$$

Tvrzení 4 (rekurentní limita) *Nechť (a_n) je dána jako $a_1 = 1$ a pro $n \geq 2$ jako*

$$a_n = \frac{a_{n-1}}{2} + \frac{1}{a_{n-1}}\ .$$

Pak $\lim a_n = \sqrt{2}$.

Důkaz. Řekněme, že $L := \lim a_n$ existuje a je vlastní, $L \in \mathbb{R}$. Pak podle limity podposloupnosti i $\lim a_{n-1} = L$. Podle částí 3, 2 a 1 předchozí věty máme $\lim \frac{1}{a_{n-1}} = \frac{1}{L}$ pro $L \neq 0$, vždy $\lim \frac{a_{n-1}}{2} = \frac{L}{2}$ a $\lim \left(\frac{a_{n-1}}{2} + \frac{1}{a_{n-1}}\right) = \frac{L}{2} + \frac{1}{L}$ pro $L \neq 0$. Tedy

$$L = \frac{L}{2} + \frac{1}{L} \rightsquigarrow L^2 - L^2/2 = 1 \rightsquigarrow L^2 = 2\ .$$

Rovnice má dvě řešení $L = \sqrt{2}$ a $L = -\sqrt{2}$. Když dokážeme, že (a_n) konverguje, dostaneme hned, že $\lim a_n = \sqrt{2}$, protože zřejmě $a_n > 0$ pro každé n, a tedy $L \geq 0$ (viz následující část přednášky).

Abychom vyloučili hodnotu $L = 0$, potřebujeme silnější nerovnost, než že $L \geq 0$. Nicméně hned uvidíme, že pro každé $n \geq 2$ je $a_n \geq \sqrt{2}$. Takže $L \geq \sqrt{2}$, pokud existuje, a L se jistě nerovná nule.

Použijeme větu o robustně monotónní posloupnosti z minulé přednášky. Dokážeme, že (a_n) je nerostoucí pro $n \geq 2$. Potřebujeme, aby pro každé $n \geq 2$ bylo

$$a_n \geq a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n} \iff \frac{a_n^2}{2} \geq 1 \iff a_n \geq \sqrt{2}\ .$$

Pro $n \geq 2$ podle AG nerovnosti skutečně je

$$a_n = \frac{a_{n-1}}{2} + \frac{1}{a_{n-1}} = \frac{a_{n-1} + 2a_{n-1}^{-1}}{2} \geq \sqrt{a_{n-1} \cdot 2a_{n-1}^{-1}} = \sqrt{2}\ .$$

Takže (a_n) je nerostoucí pro $n \geq 2$ a je kladná, tedy zdola omezená. Podle věty o robustně monotónní posloupnosti má (a_n) nezápornou vlastní limitu. Tedy, jak jsme spočítali, $\lim a_n = \sqrt{2}$. $\square$

Aby metoda založená na řešení rovnice získané nahrazením členů rekurence $a_n, a_{n-1}, \ldots$ limitou $L = \lim a_n$ byla smysluplná, musí se vždy dokázat, že $\lim a_n$ existuje. Například rekurentní posloupnost (a_n) daná jako $a_1 = 1$ a $a_n = -a_{n-1}$ *nemá* limitu $\lim a_n = 0$, přestože rovnice $L = -L$ má jediné řešení $L = 0$. Limita posloupnosti $(a_n) = (1, -1, 1, -1, \ldots)$ totiž, jak jsme dříve nahlédli, neexistuje. Podrobněji viz **K**.

- *Úloha.* Dokažte, že pro každou posloupnost (a_n) platí, že

$$\lim a_n = 0 \iff \lim |a_n| = 0$$

– další dodatek k AL.

Tvrzení 5 (limita geometrické posloupnosti) *Nechť $q \in \mathbb{R}$. Potom*

$$\lim_{n\to\infty} q^n \begin{cases} = 0 & \ldots\ |q| < 1,\ \textit{tj.}\ -1 < q < 1, \\ = 1 & \ldots\ q = 1, \\ = +\infty & \ldots\ q > 1\ \textit{a} \\ \textit{neexistuje} & \ldots\ q \leq -1\ . \end{cases}$$

Důkaz. 1. Nechť $|q| < 1$. Protože $|q^n| = |q|^n$, podle úlohy lze navíc předpokládat, že $q \in [0, 1)$. Potom je (q^n) nerostoucí a zdola omezená. Podle věty o robustně monotónní posloupnosti má nezápornou vlastní limitu L. Protože $q^n = q \cdot q^{n-1}$, platí rovnice $L = q \cdot L \rightsquigarrow L = 0/(1-q) = 0$.

2. Pro $q = 1$ máme limitu konstantní posloupnosti $(1, 1, \ldots)$.

3. Nechť $q > 1$. Podle části 1 tohoto tvrzení a části 5 tvrzení 2 je

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1/q)^n} = \frac{1}{0^+} = +\infty\ .$$

4. Nechť $q \le -1$. Jak víme, pro $q = -1$ nemá posloupnost $(q^n) = (-1, 1, -1, 1, \ldots)$ limitu. Podobně nemá limitu ani pro $q < -1$, protože podle části 3 tohoto tvrzení a aritmetiky limit má podposloupnosti s limitami $+\infty$ a $-\infty$. $\square$

• *Limity a* $(\mathbb{R}^*, <)$. Vztahy limit reálných posloupností a lineárního uspořádání $(\mathbb{R}^*, <)$ popisují dvě následující věty.

Věta 6 (lim a uspořádání) *Nechť (a_n) a (b_n) jsou dvě reálné posloupnosti s $\lim a_n = K \in \mathbb{R}^*$ a $\lim b_n = L \in \mathbb{R}^*$. Platí následující.*

1. *Když $K < L$, tak existuje n_0, že pro každé dva, ne nutně stejné, indexy $m, n \ge n_0$ je $a_m < b_n$.*
2. *Když pro každé n_0 existují indexy m a n, že $m, n \ge n_0$ a $a_m \ge b_n$, pak $K \ge L$.*

Důkaz. 1. Nechť $K < L$. Jak víme z úlohy v minulé přednášce, existuje ε, že $U(K, \varepsilon) < U(L, \varepsilon)$. Podle definice limity máme n_0, že $m, n \ge n_0 \Rightarrow a_m \in U(K, \varepsilon)$ a $b_n \in U(L, \varepsilon)$. Tedy $m, n \ge n_0 \Rightarrow a_m < b_n$.

2. Důkaz zde dostáváme zadarmo od logiky: implikace $\varphi \Rightarrow \psi$ je totéž, jako její obměna $\neg\psi \Rightarrow \neg\varphi$. Obměna implikace v části 1 je

ale právě část 2. $\square$

Ostrá nerovnost mezi členy dvou posloupností může v limitě přejít v rovnost jejich limit: pro $(a_n) := (1/n)$ a $(b_n) := (0, 0, \dots)$ je $a_m > b_n$ pro každé m a n, ale

$$\lim a_n = \lim b_n = 0 \; .$$

Předešlá věta se často (vlastně skoro vždy) uvádí ve slabší formě, že když $K < L$, pak existuje n_0, že $n \ge n_0 \Rightarrow a_n < b_n$. Podobně pro druhou část. Větu ale můžeme zesílit ještě více.

- *Úloha.* Dokažte: pro posloupnosti (a_n) a (b_n) s $\lim a_n = K$ a $\lim b_n = L$, kde $K < L$, existují n_0, A a B, že pro každé $m, n \ge n_0$ je

$$a_m < A < B < b_n \; .$$

Obměňte tuto implikaci a formulujte odpovídající druhou část.

Pro reálná čísla a a b označíme uzavřený interval s konci a a b jako $I(a, b)$:

$$I(a, b) = [a, b] \text{ pro } a \le b \text{ a } I(a, b) = [b, a] \text{ pro } a \ge b \; .$$

Množina $M \subset \mathbb{R}$ je *konvexní*, pokud $\forall\, a, b \in M \, \big(I(a, b) \subset M\big)$.

Tvrzení 7 (o intervalech) *Konvexní množiny reálných čísel jsou právě $\emptyset$, singletony $\{a\}$ pro $a \in \mathbb{R}$, celé $\mathbb{R}$ a pro reálná čísla $a < b$ intervaly* (a, b), $(-\infty, a)$, $(a, +\infty)$, $(a, b]$, $[a, b)$, $[a, b]$, $(-\infty, a]$ *a* $[a, +\infty)$.

Důkaz. Z tranzitivity $\le$ plyne, že všechny uvedené množiny jsou konvexní. Ukážeme, že jiné konvexní reálné množiny neexistují. Nechť $X \subset \mathbb{R}$ s $\emptyset \ne X \ne \mathbb{R}$ je konvexní množina a $a \in \mathbb{R} \setminus X$.

Z konvexity X plyne, že $a \in H(X)$ nebo $a \in D(X)$. Probereme jen první případ, druhý se redukuje na první otočením nerovností.

Nechť tedy $a \in H(X)$. Položíme $b = \sup(X)$. Pak $b \in X \wedge D(X) = \emptyset \Rightarrow X = (-\infty, b]$ a $b \notin X \wedge D(X) = \emptyset \Rightarrow X = (-\infty, b)$. Pokud $D(X) \neq \emptyset$, položíme $c = \inf(X)$, patrně $c < b$. Pak $b \notin X \wedge c \notin X \Rightarrow X = (c, b)$, $b \notin X \wedge c \in X \Rightarrow X = [c, b)$, $b \in X \wedge c \notin X \Rightarrow X = (c, b]$ a $b \in X \wedge c \in X \Rightarrow X = [c, b]$. $\square$

Například každé okolí $U(A, \varepsilon)$ je konvexní, ale žádné prstencové okolí $P(a, \varepsilon)$ není konvexní. Následující věta je populární vzhledem ke svému názvu.

Věta 8 (o dvou strážnících) *Buďte dány čísla a, n_0 a tři posloupnosti (a_n), (b_n) a (c_n), že*

$$\lim a_n = \lim c_n = a \wedge \forall\, n \left(n \geq n_0 \Rightarrow b_n \in I(a_n,\, c_n)\right) .$$

Pak i $\lim b_n = a$.

Důkaz. Nechť a, n_0, (a_n), (b_n) a (c_n) jsou, jak uvedeno, a je dáno ε. Podle definice limity existuje $n_1 \geq n_0$, že $n \geq n_1 \Rightarrow a_n, c_n \in U(a, \varepsilon)$. Díky konvexitě okolí $U(a, \varepsilon)$ platí, že $n \geq n_1 \Rightarrow I(a_n, c_n) \subset U(a, \varepsilon)$. Díky předpokladu tak $n \geq n_1 \Rightarrow b_n \in U(a, \varepsilon)$. Tedy $b_n \to a$. $\square$

Dva strážníci, posloupnosti (a_n) a (c_n), tak mezi sebou vedou podezřelého, posloupnost (b_n), ke společné limitě a. Pro nevlastní limitu stačí jeden strážník: když $\lim a_n = -\infty$ a $b_n \leq a_n$ pro každé $n \geq n_0$, pak i $\lim b_n = -\infty$. Podobně pro limitu $+\infty$. Věta o dvou strážnících se často uvádí ve slabší podobě, s nerovnostmi $a_n \leq b_n \leq c_n$ místo náležení $b_n \in I(a_n,\, c_n)$. Pak mají strážníci pevně daná místa vlevo a vpravo vedle podezřelého (a musejí ho vést už od $n = 1$), zatímco v naší verzi věty se mohou vyměňovat.

• *Limes inferior a limes superior posloupnosti.* Tyto termíny jsou pozůstatky latinské matematické terminologie. Znamenají, po řadě, „nejmenší limita“ a „největší limita“.

Definice 9 (hromadné body) *Nechť $A \in \mathbb{R}^*$ a $(a_n) \subset \mathbb{R}$. Řekneme, že A je hromadný bod posloupnosti (a_n), je-li limitou nějaké podposloupnosti posloupnosti (a_n). Položíme*

$$H(a_n) := \{A \in \mathbb{R}^* \mid A \text{ je hromadný bod posloupnosti } (a_n)\} .$$

Definice 10 (liminf a limsup) *Limes inferior a limes superior dané posloupnosti (a_n) definujeme po řadě jako*

$$\liminf a_n := \min(H(a_n)) \quad a \quad \limsup a_n := \max(H(a_n)) .$$

Toto minimum a maximum bereme v $(\mathbb{R}^*, <)$.

Hned dokážeme, že liminf a limsup vždy existují.

Věta 11 (liminf a limsup $\exists$) *Pro každou $(a_n) \subset \mathbb{R}$ je množina $H(a_n)$ neprázdná. V lineárním uspořádání $(\mathbb{R}^*, <)$ má minimum i maximum.*

Důkaz. Nechť (a_n) je reálná posloupnost. Minule jsme dokázali, že má podposloupnost s limitou, takže $H(a_n) \neq \emptyset$. Dokážeme existenci $\max(H(a_n))$, existence minima se dokazuje podobně.

Nechť $S := \sup(H(a_n))$, bráno v $(\mathbb{R}^*, <)$ (viz úloha minule). Ukážeme, že $S \in H(a_n)$. Když $S = -\infty$, pak nutně $H(a_n) = \{-\infty\}$ a jsme hotovi. Pro $S > -\infty$ vezmeme posloupnost (b_n), že $b_1 < b_2 < \ldots$ a $\lim b_n = S$. Podle definice suprema a množiny $H(a_n)$ má (a_n) podposloupnost (a_{m_n}), že pro každé n je

$$b_n < a_{m_n} \leq S\ .$$

Podle věty o strážnících $a_{m_n} \to S$. Tedy $S \in H(a_n)$. □

Věta 12 (vlastnosti liminfu a limsupu) *Nechť* (a_n) *je posloupnost. Pak platí následující.*

1. $\exists \lim\, a_n \Rightarrow H(a_n) = \{\lim\, a_n\}$.

2. *Nastává právě jeden z případů:* (i) (a_n) *je shora neomezená, takže* $\limsup\, a_n = +\infty$, (ii) $\lim\, a_n = -\infty$, *takže* $\limsup\, a_n = -\infty$, *a* (iii) $\limsup\, a_n \in \mathbb{R}$ *a*

$$\limsup\, a_n = \lim_{n\to\infty} \big(\sup(\{a_m \mid m \geq n\})\big)\ .$$

3. *Nastává právě jeden z případů:* (i) (a_n) *je zdola neomezená, takže* $\liminf\, a_n = -\infty$, (ii) $\lim\, a_n = +\infty$, *takže* $\liminf\, a_n = +\infty$, *a* (iii) $\liminf\, a_n \in \mathbb{R}$ *a*

$$\liminf\, a_n = \lim_{n\to\infty} \big(\inf(\{a_m \mid m \geq n\})\big)\ .$$

4. *Vždy* $\liminf\, a_n \leq \limsup\, a_n$. *Rovnost nastává, právě když existuje* $\lim\, a_n$. *Pak*

$$\liminf\, a_n = \limsup\, a_n = \lim\, a_n\ .$$

Důkaz. 1. To je zřejmé, podposloupnost dané posloupnosti s limitou má tutéž limitu.

2. Případy (i) a (ii) jsou víceméně jasné. Nechť ani jeden z nich nenastává. Pro každé n označíme $A_n := \{a_m \mid m \geq n\}$ a $b_n :=$

$\sup(A_n)$. Každá množina A_n je shora omezená a neprázdná, takže (b_n) je dobře definovaná reálná posloupnost, která je zřejmě nerostoucí. Podle věty o robustně monotónní posloupnosti má limitu $L := \lim b_n \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. $L \neq -\infty$, jinak by se $\lim a_n = -\infty$. Tedy $L \in \mathbb{R}$. Podle definice suprema

$$\forall\, n\, \exists\, m\ (\geq n)\ \big(b_n - 1/n < a_m \leq b_n\big)\ .$$

Odtud není těžké nahlédnout, že $\lim b_n = L \in H(a_n)$. Kdyby L nebyla největším prvkem $H(a_n)$, existovalo by $\delta > 0$, že pro nekonečně mnoho m je $a_m > L + \delta$. Pak bychom si vzali n, že $b_n < L+\delta$. Jenomže pak by existovalo $m \geq n$, že $a_m > L+\delta > b_n$, ve sporu s definicí čísla b_n. Tudíž $L = \max(H(a_n)) = \limsup a_n$.

3. Důkaz je podobný předchozímu.

4. První tvrzení je zřejmé. Abychom dokázali druhé, stačí dokázat, že když $\liminf a_n = \limsup a_n =: L$, pak $\lim a_n = L$. Když $L = \pm\infty$, je $\lim a_n = L$ podle případu (ii) v části 2 nebo v části 3. Nechť $L \in \mathbb{R}$ a buď dáno ε. Podle případu (iii) v částech 2 a 3 vezmeme n, že

$$L - \varepsilon < \inf(\{a_m \mid m \geq n\}) \leq \sup(\{a_m \mid m \geq n\}) < L + \varepsilon\ .$$

Pak $m \geq n \Rightarrow L - \varepsilon < a_m < L + \varepsilon$, takže $a_n \to L$. □

• *Úlohy.* Najděte posloupnost (a_n), že $H(a_n) = \mathbb{R}^*$. Ukažte, že neexistují posloupnosti (a_n) a (b_n), aby se

$$H(a_n) = \mathbb{R} \ \text{ a } \ H(b_n) = [-1,\, 1] \setminus \{0\}\ .$$

• *Úlohy.* Nechť $\limsup a_n \in \mathbb{R}$. Dokažte, že pro každé ε v

$$\limsup a_n - \varepsilon < a_n < \limsup a_n + \varepsilon$$

první nerovnost platí pro nekonečně mnoho n a druhá pro každé $n \geq n_0$. Podobně pro liminf.

• *Nekonečné řady.* Zavedeme tři základní pojmy teorie řad. Více si o řadách řekneme příště.

Definice 13 (řady) *(Nekonečnou) řadou rozumíme posloupnost* $(a_n) \subset \mathbb{R}$. *Jejím součtem rozumíme limitu*

$$\sum a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots := \lim \left(a_1 + a_2 + \cdots + a_n\right) ,$$

když existuje. Posloupnost $(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$ *sestává z takzvaných částečných součtů (řady).*

Symboly $\sum a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $a_1 + a_2 + \ldots$ ovšem často označují i samotnou posloupnost (a_n). S řadami jsme se už setkali v první přednášce v paradoxech nekonečna. Je pravda, že

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots = 0 + 0 + 0 + \cdots = 0 \; ?$$

Není to pravda. Jak rozumět těmto třem rovnostem? První platí, je to rovnost dvou posloupností, či přesněji rovnost dvou zápisů jediné posloupnosti $(1, -1, 1, -1, \ldots)$. Třetí také platí a říká, že součet řady samých nul je nula. Druhá rovnost ale neplatí. Jako rovnost dvou posloupností jistě neplatí. Neplatí ale ani jako rovnost součtů dvou řad: řada $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$ nalevo součet nemá, posloupnost jejích částečných součtů je $(1, 0, 1, 0, \ldots)$ a nemá limitu.

DĚKUJI ZA POZORNOST!