Martin Klazar

MA 1, PŘEDNÁŠKA 12, 4. 5. 2023

RIEMANNŮV INTEGRÁL

• *Riemannův integrál.* Rozvineme předminulou přednášku. Jak víme, pro čísla $a < b$ je dělení intervalu $[a,b]$ s body dvojice $(\overline{a},\overline{t})$, kde

$$\begin{aligned}\overline{a} &= (a = a_0 < a_1 < \cdots < a_k = b),\ k \in \mathbb{N},\ \text{a} \\ \overline{t} &= (t_1,\, \dots,\, t_k)\ \text{s}\ t_i \in [a_{i-1},\, a_i]\ \forall\, i \in [k]\ .\end{aligned}$$

Dále $\|\overline{a}\| = \max(\{a_i - a_{i-1} \mid i \in [k]\})$. Nechť $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Riemannův součet pro f a $(\overline{a},\overline{t})$ je

$$R(\overline{a},\, \overline{t},\, f) = \textstyle\sum_{i=1}^{k}(a_i - a_{i-1}) \cdot f(t_i)\ .$$

Definice 1 (Riemannův $\int$) *Funkce $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, $a < b$, je riemannovsky integrovatelná, psáno $f \in \mathrm{R}(a,b)$, pokud $\exists\, c\ \forall\, \varepsilon\ \exists\, \delta\ \forall\, (\overline{a},\overline{t})$ platí, že*

$$\|\overline{a}\| < \delta \Rightarrow |R(\overline{a},\, \overline{t},\, f) - c| < \varepsilon\ .$$

Pak také píšeme

$$(\mathrm{R})\int_a^b f = c \ \ \textit{nebo}\ \ (\mathrm{R})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = c$$

a řekneme, že (Riemannův) integrál funkce f přes interval $[a,b]$ se rovná c.

Když je jasné, o jaký integrál jde, upřesnění (R) vynecháme. Význam symbolu $\int_a^b f$ opět mírně rozšíříme: vždy $\int_a^a f := 0$ a $\int_b^a f := -\int_a^b f$ pro $f \in \mathrm{R}(a,b)$.

- *Úloha.* Dokažte následující tvrzení.

> **Tvrzení 2 ($f \in \mathrm{R}(a,b) \iff \dots$)** *Nechť $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Následující tři tvrzení jsou logicky ekvivalentní.*
>
> 1. $f \in \mathrm{R}(a,b)$.
> 2. *(Cauchyova podmínka)* $\forall\, \varepsilon\ \exists\, \delta\ \forall\, (\overline{a}, \overline{t})\ \forall\, (\overline{b}, \overline{u})$ *platí, že*
> $$\|\overline{a}\|,\ \|\overline{b}\| < \delta \Rightarrow |R(\overline{a},\ \overline{t},\ f) - R(\overline{b},\ \overline{u},\ f)| < \varepsilon\ .$$
> 3. *(Heineho definice)* $\forall \big((\overline{a_n}, \overline{t_n})\big)$ *platí, že*
> $$\lim \|\overline{a_n}\| = 0 \Rightarrow \big(R(\overline{a_n},\ \overline{t_n},\ f)\big) \textit{ konverguje}\ .$$
>
> *Platí-li 1 a 3, pak $\int_a^b f = \lim R(\overline{a_n}, \overline{t_n}, f)$.*

Příště uvidíme další ekvivalentní definici riemannovské integrovatelnosti, Darbouxovu.

- *Vlastnosti* (R) $\int_a^b$. Dokážeme pár vlastností tohoto integrálu.

> **Tvrzení 3 (konečně mnoho změn)** $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, *$f \in \mathrm{R}(a,b)$ a g se od f liší jen v konečně mnoha hodnotách. Potom $g \in \mathrm{R}(a,b)$ a $\int_a^b g = \int_a^b f$.*

Důkaz. f a g buďte, jak uvedeno, a nechť g se od f liší právě v $c_1, \dots, c_k \in [a,b]$. Nechť $\big((\overline{a_n}, \overline{t_n})\big)$ splňuje $\lim \|\overline{a_n}\| = 0$. Pak

$$\lim\ R(\overline{a_n},\ \overline{t_n},\ f) = \int_a^b f$$

podle předchozího tvrzení. Ale pro každé $n \in \mathbb{N}$ se

$$R(\overline{a_n},\ \overline{t_n},\ g) = R(\overline{a_n},\ \overline{t_n},\ f) + O(k \cdot \|\overline{a_n}\|)$$

a implicitní konstantu v O lze vzít jako $\max_{i\in[k]} |g(c_i)-f(c_i)|$ (úloha níže). Díky $\lim \|\overline{a_n}\| = 0$ též

$$\lim R(\overline{a_n},\, \overline{t_n},\, g) = \textstyle\int_a^b f$$

a díky předchozímu tvrzení jsme hotovi. □

- *Úloha.* Dokažte tvrzení o O v předešlém důkazu.
- *Úloha.* Dokažte, že pokud $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, $f \notin \mathrm{R}(a,b)$ a g se od f liší jen v konečně mnoha hodnotách, pak též $g \notin \mathrm{R}(a,b)$.
- *Úloha.* Ukažte, že tvrzení 3 pro Newtonův integrál neplatí.

Ovšem viz pozdější poznámka o $(\mathrm{N_e}) \int$. Pomocí tvrzení 3 rozšíříme $(\mathrm{R}) \int_a^b$ na libovolný netriviální omezený interval.

Definice 4 (obecný $(\mathrm{R}) \int_a^b f$) *$a < b$ a $f\colon I \to \mathbb{R}$, kde $I = (a,b)$ nebo $(a,b]$ nebo $[a,b)$. Nechť $f^*\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ je libovolné rozšíření funkce f. Definujeme*

$$(\mathrm{R}) \int_a^b f := (\mathrm{R}) \int_a^b f^*\ ,$$

pokud pravá strana existuje.

Pro jednoduchost zápisu vynecháme v následujícím tvrzení symboly restrikcí $f \mid [a,b]$ a $f \mid [b,c]$.

Tvrzení 5 (o restrikcích) *Jestliže $a < b < c$ jsou reálná čísla a $f\colon [a,c] \to \mathbb{R}$, pak*

$$f \in \mathrm{R}(a,\, c) \iff f \in \mathrm{R}(a,\, b) \wedge f \in \mathrm{R}(b,\, c)\ .$$

Když obě strany ekvivalence platí, pak $\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f$.

Důkaz. Implikace $\Rightarrow$. Nechť jsou dány $f \in \mathrm{R}(a, c)$ a ε. Pro $f \mid [a, b]$ dokážeme Cauchyho podmínku tvrzení 2. Buďte dána dělení s body $(\overline{a}, \overline{t})$ a $(\overline{b}, \overline{u})$ intervalu $[a, b]$ splňující, že $\|\overline{a}\|, \|\overline{b}\| < \delta$, kde δ zaručuje splnění Cauchyho podmínky v $\int_a^c f$ pro ε. Nechť $\overline{a_0}$ a $\overline{b_0}$ jsou taková rozšíření těchto dělení na dělení intervalu $[a, c]$, že $\|\overline{a_0}\|$, $\|\overline{b_0}\| < \delta$ a že body dělení $\overline{a_0}$ a v $\overline{b_0}$ obsažené v $[b, c]$ se shodují. Body $\overline{t}$ a $\overline{u}$ také rozšíříme libovolnými identickými body $t_i = u_i \in [b, c]$ do bodů $\overline{t_0}$ a $\overline{u_0}$. Pak

$$
\begin{aligned}
|R(\overline{a_0}, \overline{t_0}, f) - R(\overline{b_0}, \overline{u_0}, f)| &\overset{(1)}{=} |R(\overline{a}, \overline{t}, f) - R(\overline{b}, \overline{u}, f)| \\
&< \varepsilon
\end{aligned}
$$

(úloha níže). Důkaz Cauchyho podmínky pro $f \mid [b, c]$ je podobný. Identita $\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f$ plyne sloučením dělení intervalů $[a, b]$ a $[b, c]$ s normami jdoucími k 0 do dělení intervalu $[a, c]$ (opět s normami jdoucími k 0) a pomocí části 3 tvrzení 2.

Implikace $\Leftarrow$. Nechť $f \in \mathrm{R}(a, b) \cap \mathrm{R}(b, c)$. Podle tvrzení 8 níže je f omezená. Omezující konstantu označíme jako $d > 0$. Nechť $(\overline{a}, \overline{t})$ je libovolné dělení intervalu $[a, c]$ s body. $\overline{a}$ rozdělíme na dělení $\overline{a_1}$ a $\overline{a_2}$ intervalů $[a, b]$ a $[b, c]$ splňující $\|\overline{a_1}\|, \|\overline{a_2}\| \le \|\overline{a}\|$. Body $\overline{t_1}$ a $\overline{t_2}$ zvolíme následovně. Pokud $b \in \overline{a}$, rozdělení provedeme zřejmým způsobem. Pokud $b \notin \overline{a}$, dělení $\overline{a_1}$ a $\overline{a_2}$ získáme rozdělením toho intervalu $[a_{i-1}, a_i]$ z $\overline{a}$, že $b \in (a_{i-1}, a_i)$, na dva intervaly $[a_{i-1}, b]$ a $[b, a_i]$ a $\overline{t_1}$ a $\overline{t_2}$ získáme výběrem dvou libovolných bodů ve dvou nových intervalech. Pak

$$
R(\overline{a}, \overline{t}, f) \overset{(2)}{=} R(\overline{a_1}, \overline{t_1}, f) + R(\overline{a_2}, \overline{t_2}, f) + O(\|\overline{a}\| d)
$$

(úloha níže). Odtud lehce vidíme, že splnění Cauchyho podmínky pro f na $[a, c]$ vyplývá z jejího splnění pro f na $[a, b]$ a na $[b, c]$. Identita $\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f$ plyne stejným způsobem jako pro opačnou implikaci. $\square$

- *Úloha.* Proč platí rovnost (1)?
- *Úloha.* Proč platí rovnost (2)?
- *Úloha.* Dokažte následující tvrzení.

Tvrzení 6 ($\Leftarrow$ pro Newtonův $\int$) *Nechť $A < C < B < D$ jsou v $\mathbb{R}^*$, $f\colon (A,D) \to \mathbb{R}$ a nechť $f \in \mathrm{N}(A,B) \cap \mathrm{N}(C,D)$. Pak i $f \in \mathrm{N}(A,D) \cap \mathrm{N}(C,B)$ a*

$$(\mathrm{N})\int_A^D f = (\mathrm{N})\int_A^B f + (\mathrm{N})\int_C^D f - (\mathrm{N})\int_C^B f\ .$$

Zde je čtvrtá definici plochy oblasti $G_{\le f}$ pod grafem funkce f.

Definice 7 (opět A_f) *Nechť $f \in \mathrm{R}(a,b)$. Plochu A_f oblasti $G_{\le f}$ pod grafem funkce $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ (nebo funkce $f\colon [a,b) \to \mathbb{R}$, $\dots$) definujeme jako*

$$A_f := (\mathrm{R})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\ .$$

- *Existence Riemannova integrálu.* Nejprve dva výsledky o jeho neexistenci. Pro $M \subset \mathbb{R}$ je funkce $f\colon M \to \mathbb{R}$ omezená, pokud $\exists\, c\, \forall\, x \in M\, \big(|f(x)| < c\big)$. Jinak je f neomezená.

Tvrzení 8 (neom. funkce nemají $(\mathrm{R})\int_a^b$) *Je-li funkce $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ neomezená, pak $f \notin \mathrm{R}(a,b)$.*

Důkaz. Předpokládáme, že $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ je neomezená. Ukážeme, že $\forall\, n\ \exists\, (\overline{a}, \overline{t})$ (dělení intervalu $[a,b]$ s body), že

$$\|\overline{a}\| < 1/n \ \wedge\ |R(\overline{a},\, \overline{t},\, f)| > n\ .$$

To je v rozporu s Cauchyho podmínkou pro riemannovskou integrovatelnost funkce f.

Z neomezenosti f a z kompaktnosti $[a,b]$ vyplývá, že existuje konvergentní posloupnost $(b_n) \subset [a,b]$ s limitou $\lim b_n = \alpha \in [a,b]$ a s $\lim |f(b_n)| = +\infty$. Nechť je dáno $n \in \mathbb{N}$. Jako $\overline{a}$ vezmeme libovolné dělení $\overline{a} = (a_0, \dots, a_k)$ intervalu $[a,b]$ s $\|\overline{a}\| < 1/n$, ale takové, že existuje *jediný* index $j \in [k]$, že $\alpha \in [a_{j-1}, a_j]$. Pak vybereme libovolné body $t_i \in [a_{i-1}, a_i]$ pro každé $i \neq j$ a uvážíme neúplný Riemannův součet

$$s := \sum_{i=1,\, i\neq j}^{k} (a_i - a_{i-1}) f(t_i)\ .$$

Nyní vybereme zbývající bod $t_j \in [a_{j-1}, a_j]$ tak, že

$$|(a_j - a_{j-1}) f(t_j)| > |s| + n\ .$$

To lze, protože $b_n \in [a_{j-1}, a_j]$ pro každé dostatečně velké n. Pak definujeme $\overline{t}$ jako sestávající ze všech těchto bodů a pomocí trojúhelníkové nerovnosti $|u+v| \geq |u| - |v|$ dostaneme, že

$$|R(\overline{a},\, \overline{t},\, f)| \geq |(a_j - a_{j-1}) f(t_j)| - |s| > n\ ,$$

jak se požadovalo. □

Tvrzení 9 (moc nespojité funkce nemají $(\mathrm{R})\int_a^b$) *Je-li funkce $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ nespojitá v každém bodě nějakého podintervalu $[c,d] \subset [a,b]$ s $c < d$, pak $f \notin \mathrm{R}(a,b)$.*

Například Dirichletova funkce $d\colon [0,1] \to \{0,1\}$, daná jako $d(x) = 0$ pro racionální x a $d(x) = 1$ pro iracionální x, je všude nespojitá, takže není riemannovsky integrovatelná.

• *Úloha.* Dokažte přímo, že Dirichletova funkce není riemannovsky integrovatelná.

• *Důkaz tvrzení 9 pomocí Baireovy věty.* Nechť $a < b$ jsou reálná čísla. Množina $M \subset [a,b]$ je *řídká (v $[a,b]$)*, pokud pro každé okolí $U(c,\varepsilon)$ s $c \in [a,b]$ existuje takové okolí $U(d,\delta) \subset U(c,\varepsilon) \cap [a,b]$, že $U(d,\delta) \cap M = \emptyset$.

Věta 10 (Baireova věta v $\mathbb{R}$) *Jsou-li $a < b$ reálná čísla a $[a,b] = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$, pak některá množina M_n není řídká.*

Důkaz. Nechť v $[a,b] = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$ je každá množina M_n řídká, odvodíme spor. M_1 je řídká $\Rightarrow \exists\,[a_1,b_1] \subset [a,b]$, že $a_1 < b_1$ a $[a_1,b_1] \cap M_1 = \emptyset$. M_2 je řídká $\Rightarrow \exists\,[a_2,b_2] \subset [a_1,b_1]$, že $a_2 < b_2$ a $[a_2,b_2] \cap M_2 = \emptyset$, atd. Takto získáme takovou posloupnost vnořených intervalů

$$[a,\,b] \supset [a_1,\,b_1] \supset [a_2,\,b_2] \supset \cdots \supset [a_n,\,b_n] \supset \dots\ ,$$

že

$$\forall\, n\, \big(a_n < b_n \wedge [a_n,b_n] \cap M_n = \emptyset\big)\ .$$

Nechť $\alpha := \lim a_n \in [a,b]$. Tato limita existuje a leží v $[a,b]$, protože posloupnost (a_n) je neklesající a je zdola omezená číslem a a shora číslem b. Dokonce $a_n < b_m$ pro každé n a každé m, takže $\alpha \in [a_n,b_n]$ pro každé n. Pak ale $\alpha \notin M_n$ pro každé n, ve sporu s tím, že $\alpha \in [a,b]$. $\square$

Důkaz tvrzení 9. Nechť f, a, b, c a d jsou, jak je uvedeno (v předpokladu implikace). Ukážeme, že $\exists\,\varepsilon\;\forall\,n\;\exists\,(\overline{a},\overline{t})\;\exists\,(\overline{a},\overline{u})$, že

$$\|\overline{a}\| < 1/n \;\wedge\; R(\overline{a},\,\overline{t},\,f) - R(\overline{a},\,\overline{u},\,f) > \varepsilon\ ,$$

v rozporu s Cauchyovou podmínkou pro riemannovskou integrovatelnost funkce f.

Pro $j \in \mathbb{N}$ definujeme množinu $M_j \subset [c,d]$ jako

$$\{x \in [c,\,d] \mid \forall\,\delta\;\exists\,y,\,z \in U(x,\delta) \cap [c,\,d]\,\big(f(y) - f(z) > 1/j\big)\}\ .$$

Protože na $[c,d]$ je funkce f nespojitá, $\bigcup_{j=1}^{\infty} M_j = [c,d]$. Podle Baireovy věty existuje takové $m \in \mathbb{N}$, že M_m není v $[c,d]$ řídká. To znamená, že existuje takový podinterval $[c_1,d_1] \subset [c,d]$, že $c_1 < d_1$ a pro každé okolí $U(e,\delta)$ protínající $[c_1,d_1]$ průnik obsahuje bod z M_m.

Nechť je dáno $n \in \mathbb{N}$. Jako $\overline{a}$ vezmeme jakékoli dělení intervalu $[a,b]$ s $\|\overline{a}\| < 1/n$ a takové, že body c_1 a d_1 leží v $\overline{a}$. Pro intervaly $[a_{i-1},a_i]$ z $\overline{a}$ s vnitřky disjunktními s $[c_1,d_1]$ vybereme body $t_i = u_i \in [a_{i-1},a_i]$ libovolně. Pokud $[a_{i-1},a_i] \subset [c_1,d_1]$, můžeme vybrat takové body $t_i, u_i \in [a_{i-1},a_i]$, že $f(t_i) - f(u_i) > 1/m$ (protože M_m je hustá v $[c_1,d_1]$). Pak definujeme $\overline{t}$, resp. $\overline{u}$, jako sestávající ze všech těchto bodů t_i, resp. u_i. Z toho vyplývá, že rozdíl $R(\overline{a},\overline{t},f) - R(\overline{a},\overline{u},f)$ se rovná

$$\sum_{[a_{i-1},\,a_i] \subset [c_1,\,d_1]} (a_i - a_{i-1})(f(t_i) - f(u_i))\ ,$$

což je

$$\overset{(1)}{>} \frac{1}{m} \sum_{[a_{i-1},\,a_i] \subset [c_1,\,d_1]} (a_i - a_{i-1}) \overset{(2)}{=} \frac{d_1 - c_1}{m}\ .$$

Můžeme tedy položit $\varepsilon := (d_1 - c_1)/m$. $\square$

• *Úloha.* Proč platí v důkazu nerovnost (1) a rovnost (2)?

• *Lebesgueova věta.* Existuje mocné kritérium — Lebesgueova věta níže — s jehož pomocí se obvykle snadno určí, zda je daná funkce riemannovsky integrovatelná nebo ne. Věta používá dvě definice. Pro $f\colon M \to \mathbb{R}$ s $M \subset \mathbb{R}$ definujeme *body nespojitosti funkce f* jako

$$\mathrm{BN}(f) := \{x \in M \mid f \text{ je nespojitá v } x\} \ .$$

Definice 11 (množiny míry 0) *Množina $M \subset \mathbb{R}$ má míru nula, pokud pro každé ε existují takové intervaly $[a_n, b_n]$, $n \in \mathbb{N}$ a $a_n < b_n$, že*

$$M \subset \bigcup_{n=1}^{\infty}[a_n,\, b_n] \ \ a \ \ \sum_{n=1}^{\infty}(b_n - a_n) < \varepsilon \ .$$

• *Úlohy.* (i) Každá podmnožina množiny míry 0 má míru 0. (ii) Každá nejvýše spočetná množina má míru 0. (iii) Spočetné sjednocení množin míry 0 má míru 0. (iv) Žádný netriviální interval nemá míru 0.

• *Úloha.* Dokažte, že množina

$$\{\textstyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n/3^n \mid a_n \in \{0,\, 2\}\} \subset [0,\, 1] \ ,$$

tzv. *Cantorovo diskontinuum*, je nespočetná a má míru nula.

Následující větu *Henriho Lebesguea (1875–1941)* nebudeme dokazovat, ale s ohledem na tvrzení 8 a 9 je poměrně jasné, proč platí.

Věta 12 (Lebesgueova) *Pro každou* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *platí, že* $f \in \mathrm{R}(a,\, b) \iff f$ *je omezená a* $\mathrm{BN}(f)$ *má míru* 0.

- *Aplikace Lebesgueovy věty.* První je tato.

Důsledek 13 ($\mathrm{R}(a,b)$ **je algebra)** *Nechť čísla* c, d *jsou v* $\mathbb{R}$ *a* f, g *v* $\mathrm{R}(a,b)$. *Pak* $cf + dg \in \mathrm{R}(a,b)$ *a* $f \cdot g \in \mathrm{R}(a,b)$.

Důkaz. Předpokládáme, že $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ jsou riemannovsky integrovatelné. Tedy f a g jsou omezené, stejně jako $cf+dg$. Protože

$$\mathrm{BN}(cf + dg) \subset \mathrm{BN}(f) \cup \mathrm{BN}(g)$$

(úloha níže) a poslední dvě množiny mají míru 0, i první množina má míru 0. Důkaz pro součin je ponechán jako úloha. □

- *Úloha.* Proč platí, že $\mathrm{BN}(cf + dg) \subset \mathrm{BN}(f) \cup \mathrm{BN}(g)$?
- *Úloha.* Dokažte, že součin r. integrovatelných funkcí je r. integrovatelný.

Důsledek 14 (R. $\int$ a skládání funkcí) *Platí následující.*

1. $g\colon [a,b] \to M \subset \mathbb{R}$, $f\colon M \to \mathbb{R}$, $g \in \mathrm{R}(a,b)$ *a* f *je spojitá a omezená* $\Rightarrow f(g) \in \mathrm{R}(a,b)$.
2. $g\colon [c,d] \to [a,b]$, $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, g *je spojitá a* $f \in \mathrm{R}(a,b)$ $\Rightarrow f(g) \in \mathrm{R}(c,d)$.

Důkaz. 1. Vzhledem k tomu, že f je omezená, je omezená i složená funkce $f(g)$. Protože platí inkluze $\mathrm{BN}(f(g)) \subset \mathrm{BN}(g)$ a druhá množina má míru 0, má míru 0 i první množina.

2. Tento důkaz je ponechán jako úloha. $\square$

Úloha. Dokažte druhou část posledního tvrzení.

Úloha. Nechť $g \in \mathrm{R}(a,b)$ je taková, že $0 \notin g[[a,b]]$ a 0 není limitním bodem množiny $g[[a,b]]$. Pak $1/g \in \mathrm{R}(a,b)$.

Úloha. Odvoďte z Lebesgueovy věty následující větu, kterou jsme dokázali přímo v důsledku 3 v př. 10.

Věta 15 (spojité funkce jsou r. integrovatelné)
Je-li $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ spojitá, pak $f \in \mathrm{R}(a,b)$.

Úloha. Odvoďte z Lebesgueovy věty následující větu. Dokážeme ji i přímo.

Věta 16 (monotónní funkce jsou r. integrovatelné)
Pokud je $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ monotónní, pak $f \in \mathrm{R}(a,b)$.

Důkaz. Nechť f je neklesající, případ nerostoucí f je podobný. Že $f \in \mathrm{R}(a,b)$ dokážeme pomocí Cauchyovy podmínky (viz tvrzení 2). Nechť $(\overline{a}, \overline{t})$, kde $\overline{a} = (a_0, \ldots, a_k)$, a $(\overline{b}, \overline{u})$, kde $\overline{b} = (b_0, \ldots, b_l)$, jsou dvě dělení intervalu $[a,b]$ s body a nechť je dáno ε. Když $f(a) = f(b)$, tj. f je konstantní funkce, tvrzení platí triviálně. Jinak položíme $\delta := \frac{\varepsilon}{2(f(b)-f(a))}$.

Nejprve předpokládáme, že $\overline{a} \subset \overline{b}$, tj. že $a_0 = b_{i_0} = a$, $a_1 = b_{i_1}$, $\ldots$, $a_k = b_{i_k} = b$ pro nějaké indexy $i_0 = 0 < i_1 < \cdots < i_k = l$. Jako už jednou dříve redukujeme obecná dělení na tento případ. Nechť $k = 1$. Potom, protože f na $[a,b]$ neklesá, $R(\overline{a}, \overline{t}, f) -$

$R(\overline{b}, \overline{u}, f)$ je alespoň

$$(a_1 - a_0)f(a_0) - \sum_{i=1}^{l}(b_i - b_{i-1})f(b_l) = (b-a)\cdot(f(a) - f(b))$$

a, podobně, nanejvýš $(b-a)\cdot(f(b) - f(a))$. Takže pro $k = 1$,

$$|R(\overline{a},\ \overline{t},\ f) - R(\overline{b},\ \overline{u},\ f)| \leq (b-a)\cdot(f(b) - f(a))\ .$$

Pro obecné k použijeme tento odhad pro každé dělení $a_{r-1} = b_{i_{r-1}} < b_{i_{r-1}+1} < \cdots < b_{i_r} = a_r$ intervalu $[a_{r-1}, a_r]$, $r = 1, 2, \ldots, k$, tedy s a nahrazeným a_{r-1} a b nahrazeným a_r. Pokud $\|\overline{a}\| < \delta$ (tedy i $\|\overline{b}\| < \delta$), pak pomocí trojúhelníkové nerovnosti máme, že $|R(\overline{a}, \overline{t}, f) - R(\overline{b}, \overline{u}, f)|$ je nejvýše

$$\sum_{r=1}^{k}(a_r - a_{r-1})\cdot(f(a_r) - f(a_{r-1}))$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2(f(b) - f(a))}\sum_{r=1}^{k}(f(a_r) - f(a_{r-1})) = \frac{\varepsilon(f(b) - f(a))}{2(f(b) - f(a))} = \frac{\varepsilon}{2}\ .$$

Jsou-li $(\overline{a}, \overline{t})$ a $(\overline{b}, \overline{u})$ obecná dělení intervalu $[a, b]$ s body a s $\overline{a}, \overline{b} < \delta$, položíme $\overline{c} := \overline{a} \cup \overline{b}$ (pak i $\|\overline{c}\| < \delta$) a vezmeme pro $\overline{c}$ libovolné body $\overline{v}$. Protože $\overline{a} \subset \overline{c}$ a $\overline{b} \subset \overline{c}$, dostaneme podle předchozího případu, že $|R(\overline{a}, \overline{t}, f) - R(\overline{b}, \overline{u}, f)|$ je nejvýše

$$\begin{aligned}&|R(\overline{a},\ \overline{t},\ f) - R(\overline{c},\ \overline{v},\ f)| + |R(\overline{c},\ \overline{v},\ f) - R(\overline{b},\ \overline{u},\ f)|\\ &< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon\ .\end{aligned}$$

$\square$

• *Základní věta analýzy 2.* Vrátíme se ke vztahu mezi Riemanovými integrály a primitivními funkcemi, který jsme uvažovali v př. 10. V důsledku 4 jsme tam dokázali, že pro spojitou f se $(\mathrm{R})\int_a^b f = (\mathrm{N})\int_a^b f$. Nyní to zobecníme.

Věta 17 (ZVA 2) *Nechť $f, F\colon (a,b) \to \mathbb{R}$, kde $a < b$, F je prim. k f a $f \in \mathrm{R}(a,b)$ (viz definice 4). Pak existují vlastní limity $F_a := \lim_{x\to a} F(x)$ a $F_b := \lim_{x\to b} F(x)$ a*

$$(\mathrm{R})\int_a^b f = F_b - F_a = (\mathrm{N})\int_a^b f\ .$$

Důkaz. Nechť f a F jsou, jak zadáno. Funkci f libovolně rozšíříme na $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Nejprve dokážeme, že existují vlastní limity

$$F_a := \lim_{x\to a} F(x) \ \text{ a } \ F_b := \lim_{x\to b} F(x)\ .$$

Ukážeme, že na (a,b) je F stejnoměrně spojitá. Skutečně, podle tvrzení 8 f je omezená a můžeme vzít omezující konstantu $C > 0$. Podle Lagrangeovy věty o střední hodnotě pro každý podinterval $[c,d] \subset (a,b)$ s $c < d$ existuje bod $e \in (c,d)$, že $F(d) - F(c) = f(e)\cdot(d-c)$. Tedy

$$|F(d) - F(c)| = |f(e)|\cdot|d-c| < C|d-c|$$

a F je na (a,b) stejnoměrně spojitá. Z toho pak vyplývá, že pro libovolnou posloupnost $(a_n) \subset (a,b)$ s $\lim a_n = a$ je posloupnost $(F(a_n))$ Cauchyova (úloha níže) a má tedy vlastní limitu F_a, která nezávisí na posloupnosti (a_n). Podobně existuje vlastní limita F_b.

Dále ukážeme, že $F_b - F_a = (\mathrm{R})\int_a^b f$. Nechť je dáno ε. V (a,b) můžeme vzít taková čísla $c < d$, že $|F_a - F(c)|, |F_b - F(d)| < \varepsilon$, $C|a-c|, C|b-d| < \varepsilon$ a že existuje takové dělení $\overline{a} = (a_0, \dots, a_k)$ intervalu $[a,b]$, že $a_1 = c$, $a_{k-1} = d$ a že pro všechny body $\overline{t}$ pro $\overline{a}$

je $|\int_a^b f - R(\overline{a}, \overline{t}, f)| < \varepsilon$. Z přednášky 10 víme, že existují takové body $\overline{e} = (e_i)$ pro restrikci dělení $\overline{a}$ na interval $[c, d] = [a_1, a_{k-1}]$, že $e_i \in (a_{i-1}, a_i)$ a tedy

$$F(d) - F(c) = \sum_{i=2}^{k-1} (a_i - a_{i-1}) \cdot f(e_i)\ .$$

Body $\overline{u}$ pro $\overline{a}$ definujeme jako složené z $\overline{e}$ a ze dvou libovolných bodů u_1 a u_k v příslušných intervalech $[a, a_1] = [a, c]$ a $[a_{k-1}, b] = [d, b]$. Pak

$$\begin{aligned}
&\left|(\mathrm{R}) \int_a^b f - (F_b - F_a)\right| \\
&\le \left|(\mathrm{R}) \int_a^b f - R(\overline{a},\ \overline{u},\ f)\right| + \big|R(\overline{a},\ \overline{u},\ f) - (F_b - F_a)\big| \\
&< \varepsilon + \big|R(\overline{a},\ \overline{u},\ f) - (F(d) - F(c))\big| + \big|(F(d) - F(c)) - \\
&- (F_b - F_a)\big| \\
&\le \varepsilon + \big|(c - a) \cdot f(u_1)| + |(b - d) \cdot f(u_k)\big| + \big|F(d) - F_b\big| + \\
&+ \big|F_a - F(c)\big| \\
&< 3\varepsilon + C|b - d| + C|c - a| < 5\varepsilon\ .
\end{aligned}$$

Číslo $\varepsilon > 0$ může být libovolné, takže (R) $\int_a^b f = F_b - F_a$. $\square$

• *Úloha.* Jak ze stejnoměrné spojitosti funkce F plyne Cauchyovost posloupnosti $(F(a_n))$ pro každou posloupnost $(a_n) \subset (a, b)$ s $\lim a_n = a$?

V literatuře se často objevuje formulačně složitější verze ZVA 2, s existencí limit F_a a F_b zahrnutou do předpokladů. Jak jsme právě viděli, to není nutné. Příště budeme pokračovat ZVA 1.

DĚKUJI ZA POZORNOST!