Martin Klazar

MA 1, PŘEDNÁŠKA 1, 16. 2. 2023

REÁLNÁ ČÍSLA: ÚPLNOST A NESPOČETNOST

V `https://kam.mff.cuni.cz/~klazar/MAI22_ucebnice.pdf` je rozepsaná kniha **K** o Matematické analýze 1.

• *Co analyzuje matematická analýza?* Nekonečné operace a procesy. Podíváme se na dva paradoxy. 1. Máme nekonečný součet

$$S = 1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \dots + \overbrace{\frac{1}{n} - \frac{1}{n}}^{=0} + \dots = 0\,.$$

Po změně pořadí sčítanců se ale součet změní:

$$S = 1 + \frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \dots + \overbrace{\frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{n}}^{=\frac{1}{2n(2n-1)}>0} + \dots > 0\ ??$$

2. Je tu také nekonečná tabulka s položkami -1, 0 a 1.

1	-1	0	0	0	$\dots$	$\sum = 0$
0	1	-1	0	0	$\dots$	$\sum = 0$
0	0	1	-1	0	$\dots$	$\sum = 0$
0	0	0	1	-1	$\dots$	$\sum = 0$
0	0	0	0	1	$\dots$	$\sum = 0$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$\sum = 1$	$\sum = 0$	$\sum = 0$	$\sum = 0$	$\sum = 0$	$\dots$	$\sum = 1 \setminus 0$

??

Celkový součet po řádcích se nerovná celkovému součtu po sloupcích.

• *Úloha.* S nezápornými položkami paradox 2 nenastane. Oba celkové součty pak vyjdou stejně, mohou ale být $+\infty$.

• *Logické značení.* Nechť φ, ψ, θ, $\ldots$ jsou výroky. Logické spojky jsou $\varphi \vee \psi$ – nebo, $\varphi \wedge \psi$ – a zároveň, $\varphi \Rightarrow \psi$ – implikace, $\varphi \iff \psi$ – ekvivalence a $\neg\varphi$ – negace. Například pro každou pravdivostní hodnotu výroků φ a ψ (buď P anebo N) platí výrok, že

$$\neg(\varphi \vee \psi) \iff \neg\varphi \wedge \neg\psi$$

– je to *tautologie.* Důležité tu jsou závorky a vazebná síla spojek ($\neg$ váže silněji než $\vee$ a $\wedge$, ty zase silněji než $\iff$). Nechť $\varphi(x)$ je výroková forma. Obecný a existenční kvantifikátor $\forall$ a $\exists$ v

$$\forall\, x\, \big(\varphi(x)\big) \;\text{ a }\; \exists\, x\, \big(\varphi(x)\big)$$

říkají popořadě, že pro každé x (z daného oboru) je $\varphi(x)$ pravda a že (v daném oboru) existuje takové x, že $\varphi(x)$ je pravda.

• *Úloha.* Pro každou výrokovou formu $\varphi(x)$ jsou oba výroky

$$\neg\exists\, x\, \big(\varphi(x)\big) \iff \forall\, x\, \big(\neg\varphi(x)\big) \;\text{ a }\; \neg\forall\, x\, \big(\varphi(x)\big) \iff \exists\, x\, \big(\neg\varphi(x)\big)$$

pravdivé.

$\forall$ často vynecháváme. V oboru přirozených čísel tak například rovnost $m + n = n + m$ znamená, že $\forall\, m\, \forall\, n\, \big(m + n = n + m\big)$.

• *Množinové značení.* Symbol $\emptyset$ označuje prázdnou množinu, tj. množinu bez prvků. Značení $x \in A$ (resp. $x \notin A$) znamená, že množina x je (resp. není) prvkem množiny A. Konečnou množinu lze, teoreticky, vždy zapsat úplným výčtem jejích prvků. Například

$$M := \{a,\, b,\, 2,\, \{\emptyset,\, \{\emptyset\}\},\, \{a\}\}\;.$$

• *Úloha.* Kolik má M prvků?

Nebo množinu zapíšeme pomocí nějaké vlastnosti jejích prvků. Třeba pro množinu přirozených čísel $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \ldots\}$ je

$$M := \{n \in \mathbb{N} \mid \overbrace{\exists\, m \in \mathbb{N} \left(n = 2 \cdot m\right)}^{\text{vlastnost čísla } n}\}$$

množina (všech) sudých přirozených čísel. Jak jsme ale zadali $\mathbb{N}$?

- *Vztahy mezi množinami a operace s nimi.* Tři vztahy:

$$\begin{aligned} A \subset B \ \text{ je } \ \forall\, x \left(x \in A \Rightarrow x \in B\right) \ &\ldots\ A \text{ je podmnožinou } B\ , \\ \neg\exists\, x \left(x \in A \wedge x \in B\right) \ &\ldots\ A \text{ a } B \text{ jsou disjunktní a} \\ A = B \ \text{ je } \ \forall\, x \left(x \in A \iff x \in B\right) \ &\ldots\ \text{axiom extenzionality}\ . \end{aligned}$$

Šest operací:

$$\begin{aligned} A \cup B := \{x \mid x \in A \vee x \in B\} \ &\ldots\ \text{sjednocení } A \text{ a } B\ , \\ A \cap B := \{x \in A \mid x \in B\} \ &\ldots\ \text{průnik } A \text{ a } B\ , \\ \bigcup A := \{x \mid \exists\, b \in A \left(x \in b\right)\} \ &\ldots\ \text{suma množiny } A\ , \\ \bigcap A := \{x \mid \forall\, b \in A \left(x \in b\right)\} \ &\ldots\ \text{průnik množiny } A \neq \emptyset\ , \\ A \setminus B := \{x \in A \mid x \notin B\} \ &\ldots\ \text{(množinový) rozdíl } A \text{ a } B \text{ a} \\ \mathcal{P}(A) := \{X \mid X \subset A\} \ &\ldots\ \text{potence množiny } A\ . \end{aligned}$$

Absolutní hodnota $|X|$ označuje počet prvků konečné množiny X.

- *Úlohy.* $|\mathcal{P}(\{1, 2, \ldots, n\})| = ?$ Ukažte, že A a B jsou disjunktní, právě když $A \cap B = \emptyset$.

- *Uspořádané dvojice a trojice.*

Definice 1 (dvojice) *A a B buďte množiny. Množina*

$$(A,\, B) := \{\{B,\, A\},\, \{A\}\}$$

je (uspořádaná) dvojice množin A a B.

• *Úloha.* Platí, že $(A, B) = (C,\ D) \iff A = C \wedge B = D$.

Uspořádanou trojici množin A, B a C definujeme jako

$$(A,\ B,\ C) := \{(1,\ A),\ (2,\ B),\ (3,\ C)\}$$

a nikoli jako $(A,\ (B,\ C))$ apod., viz **K**. Podobně definujeme čtveřice $(A, B, C, D) := \{(1, A), \ldots, (4, D)\}$ a tak dál.

• *Funkce.* Pro dvě množiny A a B jejich *kartézský součin* je množina

$$A \times B := \{(a,\ b) \mid a \in A,\ b \in B\}\ .$$

Každá podmnožina $C \subset A \times B$ je *(binární) relace mezi* A *a* B. Místo $(a, b) \in C$ píšeme aCb, např. $2 < 5$. Pokud $A = B$, mluvíme o *relaci na množině* A.

Definice 2 (funkce) *Funkce (též zobrazení) f z množiny A do množiny B je každá taková uspořádaná trojice*

$$(A,\ B,\ f)\ ,$$

že $f \subset A \times B$ a pro každé $a \in A$ existuje právě jedno $b \in B$, že afb. Píšeme, že $f\colon A \to B$ a že $f(a) = b$.

A je *definiční obor* funkce f a B je její *obor hodnot*. Prvek b je *hodnota* funkce f na *argumentu* a. Pro podmnožiny $C \subset A$ a $D \subset B$ a funkci $f\colon A \to B$ definujeme množiny

$$f[C] \ := \ \{f(a) \mid a \in C\} \subset B \ \ldots \text{ obraz množiny } C \text{ funkcí } f \text{ a}$$
$$f^{-1}[D] \ := \ \{a \in A \mid f(a) \in D\} \subset A \ \ldots \text{ vzor mn. } D \text{ funkcí } f\ .$$

• *Druhy funkcí a operace s nimi.* Máme množiny $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$ a $\mathbb{N}_0 := \{0, 1, \ldots\}$, pro $n \in \mathbb{N}_0$ je $[n] := \{1, 2, \ldots, n\}$, s $[0] := \emptyset$, a X je libovolná množina. Trojí speciální funkce jsou

$$\begin{aligned} a\colon \mathbb{N} \to X &\ \ldots\ \text{posloupnosti (v množině } X) \ , \\ u\colon [n] \to X &\ \ldots\ \text{slova (nad abecedou } X) \text{ a} \\ o\colon X \times X \to X &\ \ldots\ \text{(binární) operace (na množině } X) \ . \end{aligned}$$

Pro posloupnosti píšeme $a_n := a(n)$ a $(a_n) = (a_1, a_2, \ldots) \subset X$. Pro slova píšeme $u = u_1 u_2 \ldots u_n$, kde pro $i \in [n]$ je $u_i := u(i)$. Pro $n = 0$ máme *prázdné slovo* $u = \emptyset$. Pro operace místo $o((a, b)) = c$ píšeme $a\,o\,b = c$, např. $1 + 1 = 2$. Nechť $f: X \to Y$ je funkce. Je

$$\begin{aligned} \text{prostá (injektivní, injekce)} &\ \stackrel{\text{def}}{\iff}\ f(x) = f(x') \Rightarrow x = x' \ , \\ \text{na (surjektivní, surjekce)} &\ \stackrel{\text{def}}{\iff}\ f[X] = Y \ , \\ \text{vzájemně jednoznačná} &\ \stackrel{\text{def}}{\iff}\ f \text{ je na a je prostá} \ , \\ \text{(bijektivní, bijekce)} & \\ \text{konstantní} &\ \stackrel{\text{def}}{\iff}\ \exists\, c \in Y\ \forall\, x \in X\ \big(f(x) = c\big) \text{ a} \\ \text{identická} &\ \stackrel{\text{def}}{\iff}\ X \subset Y \wedge \forall\, x \in X\ \big(f(x) = x\big) \ . \end{aligned}$$

Nechť $f\colon X \to Y$ je prostá funkce. Pak definujeme její *inverzní funkci (inverz)* f^{-1} jako funkci

$$f^{-1}\colon f[X] \to X, \text{ kde } f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y \ .$$

Pro dvě navazující funkce $g\colon X \to Y$ a $f: Y \to Z$ je jejich *složená funkce (složenina)* $f \circ g = f(g)$ funkce

$$f(g)\colon X \to Z, \text{ kde } f(g)(x) := f(g(x)) \text{ pro každé } x \in X \ .$$

• *Druhy relací.* Nechť $R \subset A \times A$ je relace na A. Řekneme, že R je *reflexivní* (resp. *ireflexivní*), když vždy aRa (resp. $\neg aRa$). R je *symetrická*, když vždy aRb implikuje bRa. R je *tranzitivní*, když vždy aRb a bRc implikují, že aRc. R je *relace ekvivalence*, zkráceně RE, když je reflexivní, symetrická a tranzitivní. Každá RE R na A rozkládá A na *bloky (ekvivalence)*, což jsou množiny $[a]_R := \{b \in A \mid bRa\}$, $a \in A$.

• *Úloha.* Bloky RE R na A tvoří rozklad množiny A: jsou to neprázdné a disjunktní množiny, jejichž suma se rovná A.

Definice 3 (rozklad podle RE) *Pro* RE R *na množině* A *tento rozklad označíme jako* $A/R := \{[a]_R \mid a \in A\}$.

Relace R na A je *trichotomická*, pokud pro každé $a, b \in A$ je aRb nebo bRa nebo $a = b$.

Definice 4 (lineární uspořádání) *Relace* $<$ *na množině* A *je* lineární uspořádání (na A)*, když* $<$ *je ireflexivní, tranzitivní a trichotomická.*

Značení $a \le b$ pak znamená, že $a < b \vee a = b$, $a > b$ znamená, že $b < a$, a podobně pro $a \ge b$. Lineární uspořádání na A označujeme jako $(A, <)$.

• *Úloha.* Dokažte, že v lineárním uspořádání $(A, <)$ pro každé dva prvky $a, b \in A$ vždy nastává právě jedna z možností $a < b$, $b < a$ a $a = b$.

• *Suprema a infima.* Nechť $(A, <)$ je lineární uspořádání a nechť $B \subset A$. Množina B je

$$\text{shora omezená, když } \exists\, h \in A\; \forall\, b \in B\; \big(b \le h\big)\ .$$

Prvek h pak je *horní mez* množiny B. Množinu horních mezí množiny B označíme jako $H(B)$. Podobně definujeme *omezenost* *zdola*, *dolní meze* a množinu $D(B)$ dolních mezí. Prvek $m \in B$ je

$$\text{maximum (největší prvek) množiny } B\text{, když } \forall\, b \in B\, \big(b \le m\big)\ .$$

Podobně se definuje *minimum (nejmenší prvek)* množiny B. Tyto prvky značíme $\max(B)$ a $\min(B)$. Pro $B = \emptyset$ nejsou definované.

Definice 5 (sup a inf) $(A, <)$ *buď lineární uspořádání a nechť* $B \subset A$. *Prvky* $\sup(B) := \min(H(B))$ *a* $\inf(B) := \max(D(B))$ *v* A, *existují-li, nazveme supremem a infimem množiny* B.

• *Úloha.* Ukažte, že když supremum existuje, je jednoznačné. Totéž platí pro infimum.

• *Racionální čísla (zlomky).* Naším cílem je říci, co jsou reálná čísla. Vybudujeme je ze zlomků, které teď připomeneme.

$$\mathbb{Z} := \{\ldots,\, -1,\, 0,\, 1,\, \ldots\}$$

je množina *celých čísel*. Položíme $Z := \{\frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z},\, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$, kde $\frac{m}{n}$ označuje uspořádanou dvojici (m, n). Relaci *shodnosti* $\sim$ na Z definujeme jako $\frac{k}{l} \sim \frac{m}{n} \overset{\text{def}}{\iff} kn = lm$.

• *Úloha.* Dokažte, že $\sim$ je RE na Z.

Nechť $\mathbb{Q} := Z/\sim$.

Tvrzení 6 (o $\mathbb{Q}$) *Prvky množiny* $\mathbb{Q}$ *nazýváme zlomky nebo racionální čísla.* $\mathbb{Q}$ *spolu s prvky* $0 := [\frac{0}{1}]_\sim$ *a* $1 := [\frac{1}{1}]_\sim$, *dvěma známými operacemi* $+$ *a* $\cdot$ *a se známým lineárním uspořádáním* $<$ *tvoří* uspořádané těleso.

Značíme ho jako $(\mathbb{Q}, 0, 1, +, \cdot, <)$ a hned vysvětlíme, co je přesně zač. Jako zlomky nebo racionální čísla označujeme nepřesně i prvky množiny Z.

• *Úlohy.* $\frac{0}{1} \not\sim \frac{1}{1}$. Řekneme, že zlomek $\frac{m}{n}$ je v *základním tvaru*, když $n > 0$ a čísla m a n jsou nesoudělná. Dokažte, že (i) žádné dva různé zlomky, které jsou v základním tvaru, nejsou shodné, a že (ii) každý zlomek se shoduje s (nutně jediným) zlomkem v základním tvaru.

Předně je $(\mathbb{Q}, 0, 1, +, \cdot)$ *těleso*. Pro každé zlomky α, β a γ ve $\mathbb{Q}$ platí

$$\begin{aligned} \alpha + \beta = \beta + \alpha &\ \ \ldots \ \text{komutativita} + , \\ \alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha &\ \ \ldots \ \text{komutativita} \cdot , \\ (\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma) &\ \ \ldots \ \text{asociativita} + , \\ (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) &\ \ \ldots \ \text{asociativita} \cdot \ \text{a} \\ \alpha \cdot (\beta + \gamma) = (\alpha \cdot \beta) + (\alpha \cdot \gamma) &\ \ \ldots \ \text{distributivita} \cdot \text{vzhledem k} + . \end{aligned}$$

Platí též $\alpha + 0 = \alpha$ a $\alpha \cdot 1 = \alpha$ (neutralita prvků 0 a 1). Konečně

$$\begin{aligned} \forall\, \alpha \ \exists\, \beta \left(\alpha + \beta = 0\right) &\ \ \ldots \ \text{aditivní inverzy existují a} \\ \forall\, \alpha \neq 0 \ \exists\, \gamma \left(\alpha \cdot \gamma = 1\right) &\ \ \ldots \ \text{multiplikativní inverzy existují} . \end{aligned}$$

Inverzy značíme jako $-\alpha := \beta$ a $\frac{1}{\alpha} = 1/\alpha = \alpha^{-1} := \gamma$.

$(\mathbb{Q}, <)$ je lineární uspořádání, které je s $+$ a $\cdot$ svázáno dvěma požadavky:

$$\alpha < \beta \Rightarrow \alpha + \gamma < \beta + \gamma \ \text{ a } \ \alpha,\, \beta > 0 \Rightarrow \alpha \cdot \beta > 0 \, .$$

A to jsou všechny *axiomy uspořádaného tělesa* $\mathbb{Q}$, které se formulují obecně úplně stejně.

• *Neúplnost uspořádaného tělesa zlomků.* $(\mathbb{Q}, 0, 1, +, \cdot, <)$ ale nemá jednu vlastnost, kterou se vyznačuje uspořádané těleso reálných čísel. Je to úplnost.

Definice 7 (úplnost) *Lineární usp.* $(A, <)$ *je úplné, pokud každá neprázdná a shora omezená podmnožina* $B \subset A$ *(tj.* $H(B) \neq \emptyset$*) má supremum* $\sup(B)$ $(= \min(H(B)))$.

Ukážeme, že lineární uspořádání $(\mathbb{Q}, <)$ úplné není. Vyplyne to z následující věty. V jejím důkazu použijeme *princip indukce*, dle něhož každá neprázdná podmnožina $X \subset \mathbb{N}$ má v $(\mathbb{Q}, <)$ minimum.

Věta 8 ($\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$) *Rovnice* $x^2 = 2$ *nemá v oboru zlomků řešení.*

Důkaz. Pro spor nechť $(a/b)^2 = 2$ pro nějaké $a, b \in \mathbb{N}$. Tedy $a^2 = 2b^2$ a podle principu indukce můžeme předpokládat, že číslo a v této rovnosti je minimální. Číslo a^2 je sudé, tedy i a je sudé a $a = 2c$ pro nějaké $c \in \mathbb{N}$. Pak ale

$$(2c)^2 = 2b^2 \rightsquigarrow 4c^2 = 2b^2 \rightsquigarrow b^2 = 2c^2 .$$

Pro rovnici $x^2 = 2y^2$ jsme dostali nové řešení $b, c \in \mathbb{N}$. Ale $b < a$, což je spor s minimalitou řešení $a, b \in \mathbb{N}$. $\square$

Důsledek 9 (neúplnost $\mathbb{Q}$) *Lineární uspořádání* $(\mathbb{Q}, <)$ *racionálních čísel není úplné.*

Důkaz. Ukážeme, že množina zlomků

$$X := \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$$

je neprázdná a shora omezená, ale nemá supremum. První dvě vlastnosti jsou jasné, $1 \in X$ a $x < 2$ pro každé $x \in X$.

Pro spor nechť $s := \sup(X) \in \mathbb{Q}$. Když $s^2 > 2$, existuje zlomek $r > 0$, že $s - r > 0$ a stále $(s - r)^2 > 2$. Pak ale $s - r > x$ pro každé $x \in X$. To je spor s tím, že s je nejmenší horní mez množiny X. Když $s^2 < 2$, existuje zlomek $r > 0$, že stále $(s + r)^2 < 2$. Tedy $s + r \in X$ a máme spor s tím, že s je horní mez množiny X. Podle trichotomie musí být $s^2 = 2$. To ale podle předchozí věty není možné. □

• *Uspořádané těleso* $\mathbb{R}$. Posloupnost $(a_n) \subset \mathbb{Q}$ je *Cauchyova*, pokud (zde $k, m, n, n_0 \in \mathbb{N}$)

$$\forall\, k\; \exists\, n_0 \left(m,\, n \ge n_0 \Rightarrow |a_m - a_n| \le 1/k\right) .$$

Množinu všech Cauchyových posloupností zlomků označíme jako C. Relaci shodnosti $\sim$ na C definujeme jako

$$(a_n) \sim (b_n) \stackrel{\text{def}}{\iff} \forall\, k\; \exists\, n_0 \left(n \ge n_0 \Rightarrow |a_n - b_n| \le 1/k\right) .$$

• *Úloha.* Dokažte, že i tato relace shodnosti $\sim$ (na C) je RE.

Definice 10 (reálná čísla) *Reálná čísla tvoří množinu* $\mathbb{R} := C/\!\sim$.

Jak se v $\mathbb{R}$ počítá? Následovně. Neutrální prvky jsou

$$0 := [(0,\, 0,\, \dots)]_\sim \;\text{ a }\; 1 := [(1,\, 1,\, \dots)]_\sim .$$

Součet a součin reálných čísel $[(a_n)]_\sim$ a $[(b_n)]_\sim$ definujeme jako

$$[(a_n)]_\sim + [(b_n)]_\sim := [(a_n + b_n)]_\sim \;\text{ a }\; [(a_n)]_\sim \cdot [(b_n)]_\sim := [(a_n \cdot b_n)]_\sim .$$

Jejich inverzy jsou

$$-[(a_n)]_\sim := [(-a_n)]_\sim \;\text{ a }\; 1/[(b_n)]_\sim := [(1/b_n)]_\sim ,$$

kde $[(b_n)]_\sim \ne 0$ a (v $\mathbb{Q}$) $1/0 := 0$. Relaci $<$ na $\mathbb{R}$ definujeme jako

$$[(a_n)]_\sim < [(b_n)]_\sim \stackrel{\text{def}}{\iff} \exists\, k\; \exists\, n_0 \left(n \ge n_0 \Rightarrow a_n < b_n - 1/k\right) .$$

Není těžké dokázat, že 0 a 1 jsou reálná čísla, že součet a součin dvou reálných čísel je reálné číslo a že totéž platí pro inverzy. Dále, stejně jako pro $\mathbb{Q}$, $\sim$ respektuje 0 a 1, aritmetické operace, inverzy a relaci $<$. Konečně není těžké dokázat obdobu tvrzení 6.

Tvrzení 11 (o $\mathbb{R}$) $(\mathbb{R}, 0, 1, +, \cdot, <)$ *je uspořádané těleso.*

Každý zlomek $a \in \mathbb{Q}$ pošleme na reálné číslo

$$[(a,\, a,\, \dots)]_\sim \in \mathbb{R}\ .$$

Uspořádané těleso $\mathbb{Q}$ tak lze brát jako vnořené do uspořádaného tělesa $\mathbb{R}$.

- *Úplnost* $\mathbb{R}$. Přechodem od $\mathbb{Q}$ k $\mathbb{R}$ získáváme úplnost. Za chvíli uvidíme, čím se za to platí.

Věta 12 (úplnost reálných čísel) *Lineární uspořádání* $(\mathbb{R}, <)$ *reálných čísel je úplné.*

Důkaz. Jen hlavní idea, podrobnosti jsou/budou v **K**. Nechť $B \subset \mathbb{R}$ je neprázdná a shora omezená množina. Následujícím postupem definujeme jisté posloupnosti (a_n), $(b_n) \subset \mathbb{Q}$. HMM je zkratka pro „horní mez množiny“.

1. (inicializace) $a_1 \in \mathbb{N}$ je libovolná HMM B a $b_1 := 1$.

2. (větvení) Nechť $a_1, \dots, a_n$ a $b_1, \dots, b_n$ jsou již definovány. Je $a_n - b_n$ HMM B?

3. ANO: definujeme $a_{n+1} := a_n - b_n$, $b_{n+1} := b_n$ a jdeme zpět na krok 2.

4. NE: definujeme $a_{n+1} := a_n$, $b_{n+1} := \frac{1}{1+1/b_n}$ a jdeme zpět na krok 2.

Není těžké dokázat, že (a_n) je Cauchyova posloupnost zlomků a že $[(a_n)]_\sim \in \mathbb{R}$ je supremem množiny B. $\square$

• *Úlohy.* Proč předešlý postup není algoritmus? Dokažte klíčový fakt, že krok 4 se vždy provede nekonečněkrát.

> **Důsledek 13 ($\sqrt{2} \in \mathbb{R}$)** *Rovnice $x^2 = 2$ má v oboru $\mathbb{R}$ řešení.*

Důkaz. Vezmeme podobnou množinu jako v důkazu důsledku 9, tedy

$$X := \{a \in \mathbb{R} \mid a^2 < 2\} \,.$$

Podle věty 12 existuje supremum $s := \sup(X) \in \mathbb{R}$. Stejné argumenty jako v onom důkazu ukazují, že nenastává ani $s^2 < 2$ ani $s^2 > 2$. Tedy $s^2 = 2$. $\square$

Později předchozí výsledek o existenci řešení rovnice zobecníme. Spojitost funkce níže znamená (později to definujeme přesně), že malá změna argumentu funkce způsobí malou změnu její hodnoty.

> **Tvrzení 14 (Bolzano–Cauchyova věta)** *Nechť $a \le b$ jsou reálná čísla a $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ je taková spojitá funkce, že $f(a)f(b) \le 0$. Potom existuje číslo $c \in [a, b]$, že $f(c) = 0$.*

• *Spočetné a nespočetné množiny.* Množina X je *nekonečná*, když existuje prostá funkce $f\colon \mathbb{N} \to X$. Když X není nekonečná, je *konečná*. Dá se dokázat, že pro každou konečnou množinu X existuje surjekce $f\colon \mathbb{N} \to X$.

Definice 15 ((ne)spočetné množiny) *Pojmenujeme následující druhy množin X.*

1. *X je spočetná, když existuje bijekce $f\colon \mathbb{N} \to X$.*
2. *X je nejvýše spočetná, je-li konečná nebo spočetná.*
3. *X je nespočetná, když není nejvýše spočetná.*

Věta 16 (spočetnost $\mathbb{Q}$) *Množina zlomků je spočetná.*

Důkaz. Nechť $Z_{\mathrm{z}} \subset Z$ jsou zlomky $\frac{m}{n}$ v základním tvaru (viz úloha výše). Stačí ukázat, že Z_{z} je spočetná. Pro zlomek $\frac{m}{n} \in Z_{\mathrm{z}}$ definujeme normu $\|\frac{m}{n}\| := |m| + n \in \mathbb{N}$ a množiny

$$Z(j) := \{z_{1,j} < z_{2,j} < \cdots < z_{k_j,j} \mid z_{i,j} \in Z_{\mathrm{z}},\ \|z_{i,j}\| = j\},\ j \in \mathbb{N}\ .$$

Například

$$Z(5) = \{\tfrac{-4}{1} < \tfrac{-3}{2} < \tfrac{-2}{3} < \tfrac{-1}{4} < \tfrac{1}{4} < \tfrac{2}{3} < \tfrac{3}{2} < \tfrac{4}{1}\} \ \text{ a } \ k_5 = 8\ .$$

Zde $\frac{0}{5} \not\in Z(5)$, protože $\frac{0}{5}$ není v základním tvaru. Patrně $j \ne j'$ $\Rightarrow$ $Z(j)$ a $Z(j')$ jsou disjunktní, každá $Z(j)$ je konečná (a $\ne \emptyset$) a $\bigcup_{j\in\mathbb{N}} Z(j) = Z_{\mathrm{z}}$. Zobrazení $f\colon \mathbb{N} \to Z_{\mathrm{z}}$ definujeme jako

$$f(1) := z_{1,1},\ f(2) := z_{2,1},\ \ldots,\ f(k_1) := z_{k_1,1},\ f(k_1{+}1) := z_{1,2},\ \ldots$$

– hodnoty funkce f nejprve projdou k_1 seřazených zlomků v $Z(1)$, pak k_2 seřazených zlomků v $Z(2)$, a tak dál. Obecná hodnota je pro $j \in \mathbb{N}$ rovna

$$f(k_1 + k_2 + \cdots + k_{j-1} + i) = z_{i,j},\ i \in [k_j]\ ,$$

kde pro $j = 1$ tento argument funkce f definujeme jako i. Lehce se vidí, že f je bijekce. $\square$

• *Nespočetnost* $\mathbb{R}$. Vyplyne ze základního výsledku o množinách, že potence $\mathcal{P}(X) = \{A \mid A \subset X\}$ je mnohem větší než X.

Věta 17 (Cantorova) *Pro žádnou množinu X neexistuje surjekce $f\colon X \to \mathcal{P}(X)$ z X na její potenci.*

Důkaz. Pro spor nechť $f\colon X \to \mathcal{P}(X)$ je surjekce. Patrně $X \neq \emptyset$. Uvážíme podmnožinu

$$Y := \{x \in X \mid x \notin f(x)\} \subset X\ .$$

Protože f je na, existuje takové $y \in X$, že $f(y) = Y$. Pokud $y \in Y$, podle definice množiny Y platí, že $y \notin f(y) = Y$. Pokud $y \notin Y = f(y)$, má y vlastnost definující množinu Y a $y \in Y$. V obou případech to je spor. □

Jako $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ označíme množinu (všech) posloupností $(a_n) \subset \{0,1\}$.

Důsledek 18 (o 0-1 posloupnostech) *Neexistuje žádná surjekce $f\colon \mathbb{N} \to \{0,\,1\}^{\mathbb{N}}$.*

Důkaz. Zobrazení $g\colon \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$, $g((a_n)) := \{n \in \mathbb{N} \mid a_n = 1\}$, je patrně bijekce. Kdyby existovala uvedená surjekce f, složenina $g \circ f$ by byla funkce z $\mathbb{N}$ na $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, v rozporu s větou 17. □

Reálná čísla se v podobě, jak jsme je zavedli v definici 10, v praxi moc nepoužívají. Spíše se zapisují jako „nekonečné“ desetinné rozvoje.

Definice 19 (rozvoje) *(Nekonečným desetinným) rozvojem ρ rozumíme posloupnost*

$$\rho = \varepsilon\, a_n\, a_{n-1}\, \dots\, a_0 \,.\, a_{-1}\, a_{-2}\, \dots\ ,$$

kde $n \in \mathbb{N}_0$, $\varepsilon = -$ nebo $\varepsilon = \emptyset$, $a_m \in \{0, 1, \dots, 9\}$ a $a_n = 0$ jen pro $n = 0$.

Například v rozvoji čísla $\pi = 3.1415\dots$ je $n = 0$, $\varepsilon = \emptyset$, $a_0 = 3$, $a_{-1} = 1$ a tak dál. Množinu rozvojů označíme jako R. Je dobře známá korespondence $F\colon R \to \mathbb{R}$ daná jako

$$F(\rho) = \big[\big(\overline{\varepsilon} a_n 10^n,\, \overline{\varepsilon}(a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1}),\, \dots\big)\big]_{\sim}\ ,$$

kde $\overline{\varepsilon} := 1$ pro $\varepsilon = \emptyset$ a $\overline{\varepsilon} := -1$ pro $\varepsilon = -$.

Věta 20 (R a $\mathbb{R}$) *Výše definované zobrazení $F\colon R \to \mathbb{R}$ je surjektivní a téměř injektivní.*

1. $\forall\, x \in \mathbb{R}\ \exists\, \rho \in R\, \big(F(\rho) = x\big)$.
2. *Když je $F(\rho) = F(\rho')$, pak se $\rho = \rho'$ nebo $\{\rho, \rho'\} = \{0.000\dots,\, -0.000\dots\}$ nebo $\{\rho, \rho'\}$ je jedna ze spočetně mnoha dvojic typu $\{-23.56999\dots,\, -23.57000\dots\}$.*

Teď dokážeme, že reálná čísla jsou nespočetná.

Důsledek 21 (daň za úplnost) *Žádná funkce není z $\mathbb{N}$ na $\mathbb{R}$.*

Důkaz. Reálná čísla bereme podle předešlé věty jako rozvoje a vezmeme množinu

$$X := \{0\,.\,a_1\, a_2\, \dots\, a_n\, \dots \mid a_n \in \{0,\, 1\}\}$$

těch rozvojů, které začínají nulou a za desetinnou tečkou mají jen nuly a jedničky. Zúžení funkce F na X je patrně prosté a pro $y \in Y := F[X] \subset \mathbb{R}$ tak označíme jako $F^{-1}(y)$ to jediné $x \in X$, že $F(x) = y$.

Pro spor nechť $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ je na. Tedy máme i surjekci $f_0\colon \mathbb{N} \to Y$. Zřejmě máme bijekci $g\colon X \to \{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Ve sporu s důsledkem 18 tak máme surjekci $g(F^{-1}(f_0))\colon \mathbb{N} \to \{0,1\}^{\mathbb{N}}$. $\square$

V **K** konstrukce zlomků a reálných čísel pojednáme jinak, abychom se vyhnuli nekonečným, resp. nespočetným, blokům v $Z/\sim$, resp. v $C/\sim$.

DĚKUJI ZA POZORNOST