POSLEDNÍ PŘEDNÁŠKA 13, 16. 5. 2022

RIEMANNŮV INTEGRÁL A JEHO UPGRADE HENSTOCK–KURZWEILŮV INTEGRÁL. POUŽITÍ INTEGRÁLŮ

• *Riemannův integrál podle J.-G. Darbouxe.* Uvedeme další ekvivalentní definici Riemannova integrálu. Pro reálná čísla $a < b$ a dělení $P = (a_0, a_1, \ldots, a_k)$ intervalu $[a, b]$ si označíme $I_i := [a_{i-1}, a_i]$ a $|I_i| := a_i - a_{i-1}$. Pro funkci $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ součty

$$s(P,\, f) := \sum_{i=1}^{k} |I_i| \cdot \inf(f[I_i]) \;\text{ a }\; S(P,\, f) := \sum_{i=1}^{k} |I_i| \cdot \sup(f[I_i])\;,$$

$s(P, f) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ a $S(P, f) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ (infima a suprema počítáme v $(\mathbb{R}^*, <)$), nazveme po řadě *dolním* a *horním součtem (pro dělení P a funkci f)*. Lehce se vidí, že f je shora neomezená, právě když každý horní součet $S(P, f) = +\infty$, a že f je zdola neomezená, právě když každý dolní součet $s(P, f) = -\infty$. Následující nerovnosti pro tyto součty ponecháme jako cvičení.

Tvrzení 1 (monotonie d. a h. součtů) *Nechť $P \subset Q$ jsou dělení intervalu $[a, b]$ a nechť $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$. Pak*

$$s(P,\, f) \le s(Q,\, f) \;\text{ a }\; S(P,\, f) \ge S(Q,\, f)\;.$$

Dokážeme ekvivalenci čtvrté definice (R) $\int$.

Tvrzení 2 (4. definice (R) $\int$) *Nechť $a < b$ jsou reálná čísla a $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$. Pak*

$$f \in \mathrm{R}(a,\, b) \iff \exists\, c\, \forall\, \varepsilon\, \exists\, P\, \forall\, \overline{t}\colon |c - R(P,\, \overline{t},\, f)| < \varepsilon\;.$$

Důkaz. Implikace $\Rightarrow$ je triviální z definice (R) $\int$, protože položíme $c := \int_a^b f$. Dokážeme $\Leftarrow$. Lehce se vidí (viz tvrzení 8 minule), že f je omezená. Nechť $d > 0$ je omezující konstanta. Podle předpokladu implikace vezmeme číslo $c \in \mathbb{R}$ a pro dané ε vezmeme dělení $P = (a_0, \ldots, a_k)$ intervalu $[a, b]$ s uvedenou vlastností. Ukážeme, že pro každé dělení Q intervalu $[a, b]$ s malou normou $\Delta(Q)$ se pro libovolné testovací body $\overline{u}$ z Q i $R(Q, \overline{u}, f)$ málo liší od c. Odtud je jasné, že $f \in \mathrm{R}(a, b)$ a že $c = \int_a^b f$.

Nechť tedy $Q = (b_0, \ldots, b_l)$ a $\overline{u}$ jsou testovací body z Q. Můžeme předpokládat, že $\Delta(Q) < \frac{1}{2}\min_{1 \le i \le k}(a_i - a_{i-1})$. Pro každé $i = 1, 2, \ldots, k$ definujeme $t_i := u_j$ pro (některé) u_j minimalizující hodnoty

$$\{f(u_j) \mid [b_{j-1},\, b_j] \cap [a_{i-1},\, a_i] \neq \emptyset\}\ .$$

Nechť X je množina těch intervalů $[b_{j-1}, b_j]$, že interval (b_{j-1}, b_j) obsahuje (nutně jen jeden) bod z P. Pak

$$R(Q,\, \overline{u},\, f) + \sum_{[b_{j-1},\, b_j] \in X} (b_j - b_{j-1}) f(u_j) \ge R(P,\, \overline{t},\, f) > c - \varepsilon\ ,$$

protože všechny intervaly $[a_{i-1}, a_i]$ jsou současně pokryty intervaly $[b_{j-1}, b_j]$ tak, že každý $[b_{j-1}, b_j]$ je použit jednou, kromě intervalů v X, které jsou použity dvakrát. Tedy

$$R(Q,\, \overline{u},\, f) > c - \varepsilon - l\Delta(Q)d\ .$$

Podobně (volbou maximalizujících u_j v $t_i := u_j$ a odečtením sumy přes $[b_{j-1},\, b_j] \in X$) vidíme, že i $R(Q, \overline{u}, f) < c + \varepsilon + l\Delta(Q)d$. Tedy

$$|R(Q,\, \overline{u},\, f) - c| < \varepsilon + l\Delta(Q)d\ ,$$

jak jsme slíbili. $\square$

Nechť $a < b$ jsou reálná čísla a $\mathcal{D} = \mathcal{D}(a, b)$ označuje množinu všech dělení intervalu $[a, b]$. Pak

$$\underline{\int_a^b} f := \sup(\{s(P,\ f) \mid P \in \mathcal{D}\}) \in \mathbb{R}^*$$

a

$$\overline{\int_a^b} f := \inf(\{S(P,\ f) \mid P \in \mathcal{D}\}) \in \mathbb{R}^*$$

(infima a suprema opět bereme v $(\mathbb{R}^*, <)$) je po řadě takzvaný *dolní* a *horní integrál (funkce f přes interval $[a, b]$).*

Tvrzení 3 **($\underline{\int} \le \overline{\int}$)** *Nechť $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ je funkce. Pak pro každá dvě dělení $P, Q \in \mathcal{D}(a, b)$ je*

$$s(P, f) \le \underline{\int_a^b} f \le \overline{\int_a^b} f \le S(Q, f)\ .$$

Důkaz. Nechť f je, jak uvedeno, a nechť P a Q jsou dělení intervalu $[a, b]$. Už známe trik s $R := P \cup Q$. Pak totiž $P, Q \subset R$ a tedy, podle tvrzení 1,

$$s(P,\ f) \le s(R,\ f) \le S(R,\ f) \le S(Q,\ f) \ \text{ a } \ s(P,\ f) \le S(Q,\ f)\ .$$

Nyní použijeme fakt, že v každém lineárním uspořádání $(X, \prec)$ pro každé dvě množiny $A, B \subset X$ s $A \preceq B$ je $\sup(A) \preceq \inf(B)$, když tyto prvky existují. Každé $a \in A$ je totiž dolní mezí množiny B, takže $A \preceq \{\inf(B)\}$. Tedy $\inf(B)$ je horní mez množiny A a $\sup(A) \preceq \inf(B)$. $\square$

Tvrzení 4 (Riemann = Darboux) *Funkce f z $[a,b]$ do $\mathbb{R}$ je*

$$f \in \mathrm{R}(a,\, b) \iff \underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f \in \mathbb{R}\ .$$

V kladném případu se pak $(\mathrm{R}) \int_a^b f = \underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$.

Důkaz. Implikace $\Rightarrow$. Nechť $f \in \mathrm{R}(a,b)$. Pak je f omezená a infima v $s(P,f)$ a suprema v $S(P,f)$ jsou konečná. Můžeme je tak libovolně tesně aproximovat funkčními hodnotami a dostaneme, že pro každé ε a každé $P \in \mathcal{D}(a,b)$ existují testovací body $\overline{t}$ z P, že

$$|s(P,\, f) - R(P,\, \overline{t},\, f)| < \varepsilon\ ,$$

a že pro každé ε a každé $P \in \mathcal{D}(a,b)$ existují testovací body $\overline{t}$, že

$$|S(P,\, f) - R(P,\, \overline{t},\, f)| < \varepsilon\ .$$

Odtud podle tvrzení 3 zde a definice 1 v minulé přednášce plyne implikace i poslední část tvrzení.

Implikace $\Leftarrow$. Nechť $I := \underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f \in \mathbb{R}$, tedy je f omezená, a je dáno ε. Podle tohoto předpokladu a podle tvrzení 3 vezmeme taková $P, Q \in \mathcal{D}(a,b)$, že $s(P,f) \le I \le S(Q,f)$ a $0 \le S(Q,f) - s(P,f) < \varepsilon$. Položíme $R := P \cup Q$. Podle tvrzení 1 a 3 je

$$s(P,\, f) \le s(R,\, f) \le I,\ R(R,\, \overline{t},\, f) \le S(R,\, f) \le S(Q,\, f))$$

pro každé testovací body $\overline{t}$ z R. Tedy i $|R(R, \overline{t}, f) - I| < \varepsilon$ a $f \in \mathrm{R}(a,b)$ podle tvrzení 2. $\square$

• *Henstock–Kurzweilův integrál aneb správná definice Riemannova integrálu.* Minule jsme viděli, že $(\mathrm{N}) \int_0^1 1/\sqrt{x} = 2$, ale že

(R) $\int_0^1 1/\sqrt{x}$ neexistuje, protože integrand $1/\sqrt{x}$ je neomezený. Neschopnost Riemannova integrálu zintegrovat neomezené funkce je jeho vážný nedostatek. V roce 1957 český matematik *Jaroslav Kurzweil (1926–2022)* a o něco později anglický matematik *Ralph Henstock (1923–2007)* upravili podmínku $\Delta(P) < \delta$ a vylepšili Riemannův integrál tak, aby dokázal zintegrovat neomezené funkce. Uvedeme definici jejich integrálu a dokážeme o něm základní větu. Nutná změna v definici 1 minulé přednášky je opticky malá, ale podstatná.

Pro interval $I \subset \mathbb{R}$ nazveme každou funkci $\delta_c\colon I \to (0, +\infty)$ *kalibrem (na I)*. Dělení $P = (a_0, a_1, \dots, a_k)$ intervalu $[a, b]$ spolu s testovacími body $\overline{t} = (t_1, \dots, t_k)$, $t_i \in [a_{i-1}, a_i]$, nazveme *δ_c-jemnými*, pokud

$$\forall\, i = 1, 2, \dots, k\colon a_i - a_{i-1} < \delta_c(t_i)\ .$$

Takže pokud $\Delta(P) < \delta$, pak dělení P spolu s libovolnými testovacími body $\overline{t}$ jsou δ_c-jemné pro konstantní kalibr $\delta_c = \delta$.

Tvrzení 5 (Cousinovo lemma) *Nechť $a < b$ jsou v $\mathbb{R}$. Pro každý kalibr $\delta_c\colon [a, b] \to (0, +\infty)$ existují δ_c-jemné dělení $P \in \mathcal{D}(a, b)$ s testovacími body $\overline{t}$. Dokonce každý konečný systém $[a_i, b_i]$, $i \in I$, vzájemně disjunktních podintervalů $[a_i, b_i] \subset [a, b]$ s testovacími body $t_i \in [a_i, b_i]$, pro něž $b_i - a_i < \delta_c(t_i)$ pro $\forall\, i \in I$, lze doplnit do δ_c-jemného dělení intervalu $[a, b]$ s testovacími body $\overline{t}$.*

Důkaz. (neúplný) Množina $M := [a, b] \setminus \bigcup_{i \in I} (a_i, b_i)$ je kompaktní a proto lze z jejího (otevřeného) pokrytí $M \subset \bigcup_{x \in M} U(x, \delta_c(x)/2)$ vybrat konečné podpokrytí $U(x_i, \delta_c(x_i)/2)$, $i = 1, 2, \dots, n$. Intervaly $[a_i, b_i]$, $i \in I$, doplníme vhodnými uzavřenými podintervaly intervalů $(x_i - \delta_c(x_i), x_i + \delta_c(x_i))$ (obsahujícími odpovídající bod x_i) do dělení intervalu $[a, b]$. Testovací body $\overline{t}$ jsou t_i, $i \in I$, a x_1, …, x_n. Výsledek je δ_c-jemný. $\square$

Následuje definice Henstock–Kurzweilova integrálu. Předešlé tvrzení ukazuje, že implikaci v jeho definici lze vždy splnit netriviálně, platným předpokladem. Definice je tedy korektní a nedopouští se logického faulu typu počítání limity funkce v bodě, který není limitním bodem definičního oboru.

Definice 6 (Henstock–Kurzweilův integrál) *Funkce $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ je integrovatelná podle Henstocka a Kurzweila, symbolicky psáno $f \in \mathrm{HK}(a, b)$, pokud existuje takové číslo $L \in \mathbb{R}$, že pro $\forall\, \varepsilon\ \exists\, \delta_c$, kde δ_c je kalibr na $[a, b]$, že pro každé dělení P intervalu $[a, b]$ a testovací body $\overline{t}$ z P platí, že*

$$P \text{ a } \overline{t} \text{ jsou } \delta_c\text{-jemné} \Rightarrow |R(P, \overline{t}, f) - L| < \varepsilon\ .$$

Pak také píšeme

$$(\mathrm{HK}) \int_a^b f = L \quad \textit{nebo} \quad (\mathrm{HK}) \int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x = L$$

a řekneme, že Henstock–Kurzweilův integrál funkce f přes interval $[a, b]$ se rovná L.

Z definice je jasné, že $\mathrm{R}(a, b) \subset \mathrm{HK}(a, b)$.

Následující věta[1] ukazuje, že Henstock–Kurzweilův integrál je už

[1] I s důkazem je převzata z J. Lukeš a J. Malý, *Measure and integral*, matfyzpress, Praha 2013, str. 96–97.

konečně ten správný partner Newtonova integrálu.

Věta 7 (HK. $\int$ a N. $\int$) *Nechť $a < b$ jsou v $\mathbb{R}$, funkce $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ je spojitá a $F' = f$ na (a,b) (hodnoty $f(a)$ a $f(b)$ jsou libovolné). Pak $f \in \mathrm{HK}(a,b)$ a*

$$(\mathrm{HK})\int_a^b f = F(b) - F(a) = (\mathrm{N})\int_a^b f\ .$$

Důkaz. Pro dané ε a $x \in (a,b)$ vzhledem k rovnosti $F'(x) = f(x)$ existuje taková hodnota $\delta_c(x) > 0$, že pro každé $y \in [a,\, b]$

$$y \in U(x,\, \delta_c(x)) \Rightarrow |F(y) - F(x) - f(x)(y-x)| \le \varepsilon|y-x|\ . \quad (*)$$

Dále existují takové hodnoty $\delta_c(a) > 0$ a $\delta_c(b) > 0$, že $|f(a)\delta_c(a)|$, $|f(b)\delta_c(b)| < \varepsilon$ a že $|F(y) - F(a)|$, $|F(z) - F(b)| < \varepsilon$ pro každé $y \in [a, a + \delta_c(a))$ a každé $z \in (b - \delta_c(b), b]$. Nechť dělení $P = (a_0, \ldots, a_k) \in \mathcal{D}(a,b)$ spolu s testovacími body $\overline{t}$ jsou δ_c-jemné. Pak pro každý testovací bod a interval $t_i \in [a_{i-1}, a_i]$ s $t_i \neq a, b$ je

$$\begin{aligned}
&|F(a_i) - F(a_{i-1}) - f(t_i)(a_i - a_{i-1})| \overset{\Delta\text{-ner.}}{\le} |F(a_i) - F(t_i) - \\
&- f(t_i)(a_i - t_i)| + |F(t_i) - F(a_{i-1}) - f(t_i)(t_i - a_{i-1})| \\
&\overset{(*)}{\le} \varepsilon|a_i - t_i| + \varepsilon|t_i - a_{i-1}| = \varepsilon(a_i - a_{i-1})\ .
\end{aligned}$$

Když $t_i \in [a_{i-1}, a_i]$ s $t_i \in \{a, b\}$, pak

$$\begin{aligned}
&|F(a_i) - F(a_{i-1}) - f(t_i)(a_i - a_{i-1})| \\
&\overset{\Delta\text{-ner.}}{\le} |F(a_i) - F(a_{i-1})| + |f(t_i)(a_i - a_{i-1})| \overset{\text{Dále ex. }\ldots}{<} 2\varepsilon\ ,
\end{aligned}$$

protože $i = 1$ a $t_1 = a$ nebo $i = k$ a $t_k = b$. Podle těchto dvou odhadů máme, že

$$|F(b)-F(a)-R(P,\,\overline{t},\,f)| \overset{\Delta\text{-ner.}}{\leq}$$
$$\leq \sum_{i=1}^{k} |F(a_i)-F(a_{i-1})-(a_i-a_{i-1})f(t_i)| < \varepsilon(b-a)+4\varepsilon\ ,$$

a tak $F(b)-F(a) = (\mathrm{HK})\int_a^b f$. □

Důsledek 8 *Nechť* $1/\sqrt{0} := 1$*. Pak* (HK) $\int_0^1 1/\sqrt{x} = 2$*.*

• *Integrace per partes a substitucí pro* (R) $\int_a^b f$*.* Uvedeme už třetí verze těchto dvou integračních vzorců. První byly pro primitivní funkci, druhé pro Newtonův integrál a tyto jsou pro Riemannův integrál. Substituce se nyní ukazuje být překvapivě netriviální. V následující větě jsou hodnoty $f(a)$, $f(b)$, $g(a)$ a $g(b)$ libovolné.

Věta 9 (per partes pro R. $\int$) *Nechť* $a < b$ *jsou v* $\mathbb{R}$*, funkce* $F, G, f, g\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ *na* (a,b) *splňují, že* $F' = f$ *a* $G' = g$*, a* $Fg, fG \in \mathrm{R}(a,b)$*. Pak platí rovnost*

$$\int_a^b Fg = \big[FG\big]_a^b - \int_a^b fG\ .$$

Důkaz. Podle linearity Riemannova integrálu i $fG+Fg \in \mathrm{R}(a,b)$. Z této linearity, z $(FG)' = fG+Fg$ na (a,b) a ze Zvana 2 (věta 15 přednášky 12) máme, že

$$\begin{aligned}(\mathrm{R})\int_a^b fG + (\mathrm{R})\int_a^b Fg &= (\mathrm{R})\int_a^b (fG+Fg)\\ &= (\mathrm{N})\int_a^b (fG+Fg) = \big[FG\big]_a^b\ ,\end{aligned}$$

což je jen úprava dokazované rovnosti. $\square$

Jednoduchý, ale ne zcela uspokojivý vzorec pro riemannovskou integraci substitucí je tento.

Věta 10 (R. $\int$ substitucí) *Nechť $G\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ má na $[a,b]$ spojitou derivaci G' a $f\colon G[\,[a,b]\,]\to\mathbb{R}$ je spojitá. Pak platí rovnost Riemannových integrálů*

$$\int_{G(a)}^{G(b)} f = \int_a^b f(G)G'\ .$$

Důkaz. Pro $x\in G[\,[a,b]\,]$ uvážíme funkci

$$F(x) := \int_{G(a)}^{x} f$$

(podle výsledků v minulé přednášce je dobře definovaná). Podle Zvana 1 (věta 16 minulé přednášky) a derivace složené funkce je funkce $F(G)$ na $[a,b]$ primitivní k $f(G)G'$. Podle Zvana 2 (věta 15 minulé přednášky) a definice funkce F se (díky $F(G(a))=0$)

$$\int_a^b f(G)G' = \big[F(G)\big]_a^b = F(G(b)) - F(G(a)) = \int_{G(a)}^{G(b)} f\ .$$

$\square$

Neuspokojivé ale je, že tu pracujeme vlastně jen s Newtonovými integrály a že tato věta je už obsažená v části 1 věty 5 o substituci v Newtonově integrálu v přednášce 11. Větu o substituci pouze pro Riemannův integrál dokázal teprve v r. 1961 H. Kestelman. Uveďme ji zde ve vylepšené podobě (s ekvivalencí pro riemannovskou integrovatelnost), s kterou přišli v r. 1970 čeští matematici D. Preiss a J. Uher[2].

Věta 11 (Preissova a Uhrova) *Nechť je* $g \in \mathrm{R}(a,b)$, *pro* $x \in [a,b]$ *nechť* $G(x) := \int_a^x g$ *a* $f\colon G[\,[a,b]\,] \to \mathbb{R}$ *je omezená. Pak* f *je riemannovsky integrovatelná na intervalu* $G[\,[a,b]\,]$, *právě když* $f(G)g \in \mathrm{R}(a,b)$, *a v pozitivním případu platí rovnost Riemannových integrálů*

$$\int_{G(a)}^{G(b)} f = \int_a^b f(G)g\ .$$

Pro důkaz viz původní článek `https://eudml.org/doc/19168` nebo nověji `https://arxiv.org/abs/1105.5938` a `https://arxiv.org/abs/1904.07446`.

• *Použití integrálů ve vzorcích pro délky, plochy a objemy.* Pomocí symbolu $|uv|$ (vždy ≥ 0) označíme délku rovinné úsečky s konci $u, v \in \mathbb{R}^2$.

[2]Poznámka k větě o substituci pro Riemannův integrál, *Čaopis pěst. mat.* **95** (1970), 345–347.

Definice 12 (délka grafu) *Řekneme, že* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *má rektifikovatelný graf, je-li supremum*

$$\ell(f) := \sup\Big(\{\textstyle\sum_{i=1}^{k} \big|\big(a_{i-1}, f(a_{i-1})\big)\ \big(a_i, f(a_i)\big)\big| \mid$$
$$\mid (a_0,\, \ldots,\, a_k) \in \mathcal{D}(a,\, b)\}\Big)$$

konečné. Číslo $\ell(f)$ *pak nazveme délkou grafu funkce* f*.*

Toto supremum je vlastně supremem délek lomených čar vepsaných grafu G_f.

Následujícím vzorcem pro délku grafu jsme schopni spočítat třeba délku obvodu obdélníka a vyrovnat se tak matematice na základní škole. Obvod stačí rozdělit na čtyři úsečky a svislé z nich otočit o $\pi/2$ (či jen o ε), aby vznikly čtyři grafy funkcí.

Věta 13 (délka grafu) *Nechť spojitá* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *má na* (a,b) *vlastní* $f' \in \mathrm{R}(a,b)$*. Funkce* f *pak má rektifikovatelný graf s délkou*

$$\ell(f) = \int_a^b \sqrt{1 + (f')^2}\ .$$

Důkaz. Nechť $g := \sqrt{1 + (f')^2}$. Pomocí výsledků dosažených v minulé přednášce snadno vidíme, že Riemannův integrál $\int_a^b g$ existuje. Suma v definici 12, kterou označíme jako $K(P, f)$, zjemněním dělení $P = (a_0, \ldots, a_k)$ neklesne, tudíž pro každou posloupnost $(P_n) \subset \mathcal{D}(a,b)$ s $\lim \Delta(P_n) = 0$ se

$$\lim K(P_n,\, f) = \ell(f)$$

nebo pro nerektifikovatelný graf se tato limita vždy rovná $+\infty$. Ale

$$K(P,\ f) = \sum_{i=1}^{k}(a_i - a_{i-1})\sqrt{1 + [(f(a_i) - f(a_{i-1}))/(a_i - a_{i-1})]^2}$$

a podle Lagrangeovy věty o střední hodnotě se

$$\frac{f(a_i) - f(a_{i-1})}{a_i - a_{i-1}} = f'(t_i)$$

pro nějaké $t_i \in (a_{i-1}, a_i)$. Označme tyto testovací body $\overline{t}$. Tedy pro (P_n) jako výše se

$$\int_a^b g = \lim_{n\to\infty} R(P_n,\ \overline{t(n)},\ g) = \lim_{n\to\infty} K(P_n, f) = \ell(f)\ .$$

$\square$

Tento vzorec lze rozšířit na křivky tvaru $\varphi\colon [a, b] \to \mathbb{R}^n$.

Plochu rovinné oblasti jsme nedefinovali nezávisle na integrálu, totéž pro objem v $\mathbb{R}^3$, a tak dva následující vzorce jsou — alespoň v těchto našich přednáškách — na rozdíl od délky grafu jen na úrovni definic.

Definice 14 (plocha mezi grafy) *Nechť* $f, g \in \mathrm{R}(a, b)$ *a* $f \le g$ *na* $[a, b]$. *Pak*

$$\textit{plocha}\big(\{(x,\ y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a,\ b] \wedge f(x) \le y \le g(x)\}\big)$$
$$:= \int_a^b (g - f)\ .$$

Pro nezápornou funkci $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ definujeme *rotační těleso vzniklé rotací* G_f *kolem osy* x jako

$$V(a,\ b,\ f) := \{(x,\ y,\ z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in [a,\ b] \wedge y^2 + z^2 \le f(x)^2\}\ .$$

Definice 15 (objem rotačního tělesa) *Nechť funkce f je v $\mathrm{R}(a,b)$ a je nezáporná. Pak*

$$\mathit{objem}\big(V(a,\, b,\, f)\big) := \pi\int_a^b f^2\;.$$

V intuitivním pohledu — nebo jako mnemotechnika pro zapamatování — plyne Riemannův integrál

$$\int_a^b \pi\cdot f(x)^2\,\mathrm{d}x$$

pro objem tělesa $V(a,b,f)$ ze vzorce πr^2 pro plochu kruhu s poloměrem $r>0$. Pro x probíhající $[a,b]$ integrál sečte objemy

$$\pi\cdot f(x)^2\,\mathrm{d}x$$

tenkých kruhových koláčů s poloměry $f(x)$ a tloušťkou dx. Jako cvičení zkuste podobnou úvahou odvodit vzorec pro povrch, to jest plochu povrchu, tělesa $V(a,b,f)$. Pak můžete vypočítat povrch koule $V(-r,r,\sqrt{r^2-x^2})$ s poloměrem $r>0$.

• *Odhady součtů pomocí integrálů.* Jsou užitečné třeba v analytické teorii čísel, kde se součty tvaru $\sum_{n\in X} f(n)$, pro nějakou množinu $X\subset\mathbb{Z}$ a funkci $f(x)$ danou analytickou formulí, často vyskytují. Začneme jednoduchým odhadem s širokým oborem platnosti.

Tvrzení 16 ($\sum f(n)$ pro monot. funkci) *Nechť $a < b$ jsou celá čísla a $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ je monotónní funkce. Pak*

$$\sum_{a<n\le b} f(n) = (\mathrm{R})\int_a^b f + \theta(f(b) - f(a)) ,$$

pro nějaké číslo $\theta \in [0,1]$.

Důkaz. Integrál existuje díky monotonii funkce f podle věty 14 minulé přednášky. Předpokládáme, že f je neklesající, případ nerostoucí f se řeší podobně. Teď tedy dokazujeme nerovnosti

$$0 \le \sum_{a<n\le b} f(n) - \int_a^b f \le f(b) - f(a) .$$

Pro $b = a+1$ platí: suma se rovná $f(a+1)$ a protože pro $x \in [a, a+1]$ je $f(a) \le f(x) \le f(a+1)$, podle monotonie $(\mathrm{R})\int$ (kterou jsme ale asi explicitně neuvedli) je $f(a) = f(a)\cdot 1 \le \int_a^{a+1} f \le f(a+1)\cdot 1 = f(a+1)$. Sečtením těchto nejjednodušších nerovností s mezemi $a = m, b = m+1$ pro $m = a, a+1, \ldots, b-1$ dostaneme obecný případ. $\square$

Třeba pro harmonická čísla $H_n := \sum_{i=1}^n 1/i$ odtud dostaneme pro $n \ge 3$ odhad

$$\begin{aligned} H_n &= 1 + \sum_{i=2}^n \frac{1}{i} = 1 + \int_1^n 1/x + \theta(1/n - 1) = [\log x]_1^n + \delta \\ &= \log n + \delta,\ 1/n \le \delta \le 1 . \end{aligned}$$

Důsledek 17 (integrální kritérium) *Předpokládáme, že $m \in \mathbb{N}$ a že funkce $f\colon [m, +\infty) \to \mathbb{R}$ je nezáporná a nerostoucí. Potom řada*

$$\sum_{n=m}^{\infty} f(n) \ \textit{konverguje} \iff \lim_{n\to\infty} \int_m^n f < +\infty \ .$$

Důkaz. Jak víme, uvedené Riemannovy integrály existují díky monotonii f. Podle předešlého tvrzení pro každé celé číslo $N \geq m+2$ máme identitu

$$\sum_{n=m}^{N} f(n) = f(m) + \int_m^N f + \underbrace{\theta(f(N) - f(m))}_{\in[-f(m),0]} \ .$$

Odtud pro $N \to \infty$ vyplývá uvedená ekvivalence. □

Například řada $\sum_{n=2}^{\infty} 1/n \log n$ diverguje, tj. má součet $+\infty$, protože

$$\lim_{n\to\infty} \int_2^n \frac{\mathrm{d}y}{y \log y} = \lim_{n\to\infty} \big[\log(\log y)\big]_2^n = +\infty \ .$$

Stejnou metodou se naopak pro každé reálné $c > 1$ snadno dokáže konvergence řady $\sum_{n=2}^{\infty} 1/n(\log n)^c$.

Uvedeme variantu tvrzení 16 pro funkce s integrovatelnou derivací, kdy se dostane přesnější odhad součtu ve tvaru identity. Připomínáme, že $\lfloor a \rfloor$ je dolní celá část čísla $a \in \mathbb{R}$, největší $m \in \mathbb{Z}$ s $m \leq a$. Zavedeme značení $\langle a \rangle := a - \lfloor a \rfloor - \frac{1}{2} \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Věta 18 ($\sum f(n)$ pro funkci s derivací) *Nechť $a < b$ jsou reálná čísla a funkce $f \in \mathrm{R}(a,b)$ má na (a,b) derivaci $f' \in \mathrm{R}(a,b)$. Pak platí formule (integrály jsou Riemannovy)*

$$\sum_{a<n\le b} f(n) = \int_a^b f + \underbrace{\int_a^b \langle x\rangle f'(x)}_{T} - \big[\langle x\rangle f(x)\big]_a^b\ .$$

Důkaz. [3]Formule je aditivní v intervalech $[a,b)$, tedy stačí uvažovat jen případ, že $m \le a < b \le m+1$ pro nějaké $m \in \mathbb{Z}$. Integrace per partes (věta 9) pak dává, že

$$T = \int_a^b (x-m-1/2)f'(x) = \big[(x-m-1/2)f(x)\big]_a^b - \int_a^b f\ .$$

Po dosazení tohoto do pravé strany formule z ní zbude jen $(\lfloor b\rfloor - m)f(b)$. Pro $b < m+1$ to je 0, v souladu s levou stranou. Pro $b = m+1$ to je $f(m+1)$, opět v souladu s levou stranou. $\square$

Pro harmonická čísla se touto formulí snadno odvodí zpřesněný odhad

$$H_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = \log n + \gamma + O(1/n)\ \ (n \in \mathbb{N})\ ,$$

který jsme zmínili v části 1 věty 4 v přednášce 4.

Přednášku a celý semestr zakončíme Abelovou sumační formulí, která se často používá. Pro posloupnost $(a_n) = (a_1, a_2, \dots) \subset \mathbb{R}$ a $x \in \mathbb{R}$ položíme

$$A(x) := \sum_{n\le x} a_n\ ,$$

[3]E. C. Titchmarsh, *The Theory of the Riemann Zeta-function*, Clarendon Press, Oxford 1986, str. 13–14.

s prázdnou sumou definovanou jako 0.

Věta 19 (Abelova[a] sumace) *Nechť $(a_n) \subset \mathbb{R}$, $a < b$ jsou kladná reálná čísla a $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ je funkce mající na (a,b) vlastní derivaci $f' \in \mathrm{R}(a,b)$. Pak platí formule*

$$\sum_{a<n\le b} a_n f(n) = \big[A(x)f(x)\big]_a^b - \underbrace{\int_a^b A(x)f'(x)}_{T} \ .$$

[a]Podle norského matematika Nielse Henrika Abela (1802–1829).

Důkaz. Použijeme Titchmarshův trik z předchozího důkazu. Formule je zase aditivní v intervalech $[a,b)$, tedy opět stačí uvažovat jen případ, že $m \le a < b \le m+1$ pro nějaké $m \in \mathbb{N}_0$. Zvana 2 (věta 15 minule) pak dává, že

$$T = \int_a^b A(m)f'(x)\,\mathrm{d}x = A(m)\big[f(x)\big]_a^b \ .$$

Po dosazení tohoto do pravé strany formule z ní zbude $(A(b) - A(m))f(b)$. Pro $b < m+1$ to je 0, v souladu s levou stranou. Pro $b = m+1$ to je $a_{m+1}f(m+1)$, opět v souladu s levou stranou. □

DĚKUJI ZA POZORNOST!