MATEMATICKÁ ANALÝZA 1 (NMAI054)
letní semestr 2020/21

Přednášky 1–7 Martina Klazara a přednášky 8–14 Víta Jelínka.

https://iuuk.mff.cuni.cz/~jelinek/1920/kompletni-poznamky_MA1.pdf

PŘEDNÁŠKA 1 (4.3.2021). PARADOXY NEKONEČNA. CO JE TO FUNKCE? O MNOŽINÁCH. REÁLNÁ ČÍSLA $\mathbb{R}$. ZÁVĚREM I KOMPLEXNÍ ČÍSLA $\mathbb{C}$.

Co stačí (a je nutné) umět ke zkoušce: (i) nekonečné $\sum$ vedou k paradoxům, (ii) definice funkce, (iii) funkce prostá, na a bijekce, (iv) značení $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$, (v) co je supremum a infimum v lineárním uspořádání, (vi) zhruba co je $\mathbb{R}$ (co říkají věty 11 a 12), (vii) $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (věta 16), (viii) co je (nejvýše) spočetná a nespočetná množina, (ix) $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ a $\mathbb{Q}$ jsou spočetné (věta 25.2), (x) $\mathbb{R}$ je nespočetná (věta 18), (xi) definice algebraického a transcendentního čísla a (xii) co říká ZVAlg (věta 32).

• Co analyzuje Matematická analýza? Nekonečné procesy a operace, pracuje tak s nekonečnem ∞.
• Proto úzce souvisí s Teorií množin zvanou TEMNO.

Když $a_n \in \mathbb{R}$, co je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots$?

Úloha 1.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} =? \quad a \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} =?$$

(nápověda: $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$*).*

Podstatně těžší je spočítat, že

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$$

— objevil to *Leonhard Euler (1707–1783)* v r. 1734.

• Dva paradoxy. Komutativita sčítání neplatí:

$$1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \cdots = 0 + 0 + 0 + \cdots = 0 \ ,$$

ale po zpřeházení sčítanců tak, že po dvou kladných následuje jeden záporný, máme

$$\underbrace{1 + \frac{1}{2} - 1}_{\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}}_{\frac{1}{12}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{3}}_{\frac{1}{30}} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n(2n-1)} > 0 \ ??$$

Dále tu je paradox nekonečné tabulky. Když má na hlavní diagonále 1, nad ní -1 a jinde 0, tak se celkový součet po řádcích liší od toho po sloupcích:

1	-1	0	0	0	$\ldots$	$\sum = 0$	
0	1	-1	0	0	$\ldots$	$\sum = 0$	
0	0	1	-1	0	$\ldots$	$\sum = 0$	
0	0	0	1	-1	$\ldots$	$\sum = 0$	??
0	0	0	0	1	$\ldots$	$\sum = 0$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	
$\sum = 1$	$\sum = 0$	$\sum = 0$	$\sum = 0$	$\sum = 0$	$\ldots$	$\sum = 1 \setminus 0$	

• Co je to funkce? Matematická, nikoli politická! Prázdná množina $\emptyset$ nemá žádné prvky. Uspořádanou dvojici (a, b) množin a a b, v tomto pořadí, definujeme jako

$$(a,\, b) := \{\{b,\, a\},\, \{a\}\}$$

—v r. 1921 s tím přišel *Kazimierz Kuratowski (1896–1980).*

Úloha 2. *Dokažte, že* $(a, b) = (c, d) \iff a = c \wedge b = d$.

Uspořádaná trojice (a, b, c) je

$$(a,\, b,\, c) := \{(1,\, a),\, (2,\, b),\, (3,\, c)\}\ .$$

Podobně definujeme usp. k-tici $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ pro každé $k \in \mathbb{N}$. Nedefinujeme $(a, b, c) := ((a, b), c)$ apod., i když se to tak často dělá, protože pak se neví, zda množina (a, b, c) je usp. dvojice množin (a, b) a c nebo usp. trojice množin a, b a c (!)

Úloha 3. *Nechť množina* $A := (a_1, a_2, \ldots, a_k)$ *je usp.* k*-tice, množina* $B := (b_1, b_2, \ldots, b_l)$ *je usp.* l*-tice a* $k \le l$*. Dokažte, že v naší definici*

$$A = B \iff k = l \wedge \forall\, i = 1,\, 2,\, \ldots,\, k:\ a_i = b_i\ .$$

• Funkce (též zobrazení) f z množiny A do množiny B je usp. trojice (A, B, f), že

$$f \subset A \times B := \{(a,\, b) \mid a \in A,\, b \in B\}$$

a platí, že $\forall\, a \in A\ \exists$ právě jedno $b \in B$, že $(a, b) \in f$. Píšeme $f\colon A \to B$ a $f(a) = b$ (nebo i $a \mapsto b$). Literární definice typu „Funkce je pravidlo či předpis, které každému prvku z A přiřadí …“ nejsou vhodné. A je definiční obor f a B je obor hodnot f. Pro $X \subset A$ je

$$f[X] := \{f(a) \mid a \in X\} \subset B$$

obraz množiny X funkcí f. Pro $Y \subset B$ je

$$f^{-1}[Y] := \{a \in A \mid f(a) \in Y\} \subset A$$

vzor množiny Y funkcí f.
Nechť $f\colon A \to B$. Funkce f je prostá (injektivní, injekce), když $a \neq a' \Rightarrow f(a) \neq f(a')$. Je na (surjektivní, surjekce), když $f[A] = B$. Je bijektivní (bijekce), je-li prostá a na. Je-li f prostá, její inverz (inverzní funkce) je funkce $f^{-1}\colon f[A] \to A$, definovaná jako

$$f(a) = b \iff f^{-1}(b) = a\ .$$

Úloha 4. *Je pravda, že* $(f^{-1})^{-1} = f$*?*

Úloha 5. *Ukažte, že když je funkce* $f\colon A \to A$ *prostá a* A *je konečná množina, tak je* f *na. Co když je* A *nekonečná?*

• Skládání zobrazení. Nechť $f\colon A \to B$ a $g\colon B \to C$. Pak složená funkce (složenina) $h = g \circ f = g(f)\colon A \to C$ je definovaná pro $a \in A$ jako

$$h(a) = g(f(a))\ .$$

Identická funkce $\mathrm{id}_A\colon A \to A$ je daná předpisem $\mathrm{id}_A(a) = a$.

Úloha 6. *Dokažte, že* $f\colon A \to B$ *je bijekce, právě když existuje* $g\colon B \to A$*, že* $g \circ f = \mathrm{id}_A$ *a* $f \circ g = \mathrm{id}_B$*.*

Věta 7 (Cantor–Bernsteinova). *Existují-li prosté funkce*

$$f\colon A \to B \quad a \quad g\colon B \to A\ ,$$

existuje i bijekce $h\colon A \to B$*. Tu lze navíc volit tak, že pro každé* $a \in A$ *je* $h(a) = f(a)$ *nebo* $h(a) = g^{-1}(a)$*.*

Výše definovaný kartézský součin $A \times B$ má přívlastek odkazující na *Reného Descartese (1596–1650)*. Kartézský součin $k \in \mathbb{N}$ množin $A_1, A_2, \ldots, A_k$ definujeme jako

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k := \{(a_1, a_2, \ldots, a_k) \mid a_i \in A_i\} .$$

Pro $A_1 = A_2 = \cdots = A_k = A$ píšeme krátce jen A^k.

• Číselné obory. Přirozená čísla jsou

$$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \ldots\} \text{ a } \mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, \ldots\} = \mathbb{N} \cup \{0\} .$$

• Indukce. Princip indukce je vlastnost (axiom) množiny $\mathbb{N}$, že každá neprázdná podmnožina $X \subset \mathbb{N}$ má nejmenší prvek $a \in X$, to jest $b \in X \Rightarrow a \le b$.

Posloupnost (a_n) (v množině A) je funkce $a\colon \mathbb{N} \to A$, kde pro $n \in \mathbb{N}$ píšeme $a_n := a(n)$. Celá čísla a zlomky (racionální čísla) jsou po řadě

$$\mathbb{Z} := \{\ldots, -1, 0, 1, \ldots\} \text{ a } \mathbb{Q} := \{a/b \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\} .$$

Připomeňte si, že $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff ad = bc$. Základní tvar zlomku $\frac{a}{b}$ má $b \in \mathbb{N}$ a nesoudělná čísla a a b: jediné $d \in \mathbb{N}$ dělící a i b je $d = 1$.

• Definovat pracovní arénu analýzy, jíž jsou reálná čísla $\mathbb{R}$ —

… ———————————————————— …

— není jednoduché a zde se do toho nepustíme. Různé konstrukce $\mathbb{R}$ podali: *Richard Dedekind (1831–1916)* v r. 1858 pomocí tzv. řezů na $\mathbb{Q}$, *Carl Weierstrass (1815–1897)* kolem r. 1863 desetinnými rozvoji a *Charles Méray (1835–1911)*, *Georg Cantor (1845–1918)* a *Eduard Heine (1821–1881)* kolem r. 1870, kteří použili tzv. Cauchyovy posloupnosti zlomků.

• $X \subset \mathbb{Q}$ je <u>řez</u>, když (i) $X \neq \emptyset, \mathbb{Q}$, (ii) $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$, $\alpha < \beta \in X \Rightarrow \alpha \in X$ a (iii) X nemá maximum. Pak $\mathbb{R} := \{\text{řezy}\}$.
• $(a_n) \subset \mathbb{Q}$ je <u>Cauchyova posl.</u>, když

$$\forall\, k \in \mathbb{N}\; \exists\, n_0 \in \mathbb{N} :\; m, n \geq n_0 \Rightarrow |a_m - a_n| < 1/k\ .$$

Pak $\mathbb{R} := \{\text{Cauchyovy posl.}\}/\sim$, pro jistou ekvivalenci $\sim$.

• <u>Úplné uspořádané těleso F</u> je algebraická struktura

$$F = (F,\, 0_F,\, 1_F,\, +_F,\, \cdot_F,\, <_F)\ ,$$

v níž F je množina, $0_F, 1_F \in F$ jsou její dva různé prvky,

$$+_F,\ \cdot_F \colon F \times F \to F$$

jsou (binární) <u>operace</u> (na F),

$$<_F \subset F \times F$$

je (binární) <u>relace</u> (na F) a která splňuje následujících zhruba 15 axiomů: $+_F$ a $\cdot_F$ jsou asociativní a komutativní a platí pro ně distributivita, 0_F, resp. 1_F, je neutrální vzhledem k $+_F$, resp. $\cdot_F$, existují inverzní prvky $-a$ a a^{-1},

$$\begin{aligned} &\forall\, a \in F\; \exists -a \in F :\; a +_F (-a) = 0_F \ \text{ a} \\ &\forall\, a \in F \setminus \{0_F\}\; \exists\, a^{-1} \in F :\; a \cdot_F a^{-1} = 1_F\ , \end{aligned}$$

$<_F$ je <u>lineární uspořádání</u> (na F)—takže $<_F$ je <u>tranzitivní</u> ($a <_F b \wedge b <_F c \Rightarrow a <_F c$), <u>ireflexivní</u> ($a \not<_F a$) a <u>trichotomická</u> ($a <_F b \vee a = b \vee a >_F b$)—platí dva axiomy svazující operace a relaci, totiž

$$\begin{aligned} &a <_F b \Rightarrow a +_F c <_F b +_F c \ \text{ a} \\ &0_F <_F a \wedge 0_F <_F b \Rightarrow 0_F <_F a \cdot_F b\ , \end{aligned}$$

a konečně lineární uspořádání $(F, <_F)$ je úplné, každá neprázdná a shora omezená (tj. s horní mezí, viz níže) množina $X \subset F$ má supremum $\sup(X) \in F$.

• Supremum. Pro lineární uspořádání $(A, <_A)$ používáme značení $a \leq_A b := a <_A b \vee a = b$. Pro $X \subset A$ je $s \in A$ supremem množiny X, symbolicky $s = \sup(X)$, když

$$\overbrace{(\forall\, x \in X:\ x \leq_A s)}^{s \text{ je } \underline{\text{horní mez}} \text{ množiny } X} \wedge (\forall\, y \in A:\ (\forall\, x \in X:\ x \leq_A y) \Rightarrow s \leq_A y)$$

— s je nejmenší horní mez množiny X.

Úloha 8. *V situaci jako výše je*

$$s = \sup(X) \iff \forall\, x \in A:\ \big((x \in X \Rightarrow x \leq_A s) \wedge \\ \wedge \underbrace{(x <_A s \Rightarrow \exists\, y \in X:\ x <_A y \leq_A s)}_{\textit{aproximační vlastnost suprema}}\big)$$

— s je horní mez množiny X a dá se zdola libovolně těsně aproximovat prvky $y \in X$.

Úloha 9. *Definujte duální pojem infima $\inf(X) \in A$ množiny $X \subset A$ v lineárním uspořádání $(A, <_A)$.*

Úloha 10. *Co jsou $\sup(\emptyset)$ a $\inf(\emptyset)$? Kdy tyto prvky existují? Proč je v definici úplnosti uspořádaného tělesa $X \neq \emptyset$?*

Věta 11 ($\exists\, \mathbb{R}$). *Existuje úplné uspořádané těleso.*

Důkaz. Pomocí řezů nebo Cauchyových posl. nebo desetinných rozvojů. □

Věta 12 ($\mathbb{R}$ je jediné). *Každá dvě úplná uspořádaná tělesa jsou izomorfní jako uspořádaná tělesa.*

—pro každá dvě úplná uspořádaná tělesa $(F, 0_F, 1_F, +_F, \cdot_F, <_F)$ a $(G, 0_G, 1_G, +_G, \cdot_G, <_G)$ tedy existuje bijekce $f\colon F \to G$, že pro každé $x, y \in F$ je

$$f(0_F) = 0_G,\ f(1_F) = 1_G,\ f(x +_F y) = f(x) +_G f(y)\ ,$$

$$f(x \cdot_F y) = f(x) \cdot_G f(y)\ \text{ a }\ x <_F y \iff f(x) <_G f(y)\ .$$

Úloha 13. *Ukažte, že v izomorfismu f si odpovídají i inverzní prvky vzhledem k $+_F$ a $+_G$, resp. $\cdot_F$ a $\cdot_G$.*

• Reálnými čísly $\mathbb{R}$ rozumíme ve smyslu vět 11 a 12 jednoznačně určené úplné uspořádané těleso

$$\mathbb{R} = (\mathbb{R},\ 0,\ 1,\ +,\ \cdot,\ <)\ .$$

$\mathbb{R} \supset \mathbb{Q}$, rozšiřuje tak uspořádané těleso zlomků

$$\mathbb{Q} = (\mathbb{Q},\ 0,\ 1,\ +,\ \cdot,\ <\ )$$

a zaplňuje jeho „díry“. $\mathbb{R}$ si můžeme konkrétně představovat jako množinu nekonečných desetinných rozvojů, jako jsou třeba

$$-2089.005607399\ldots \quad \text{nebo} \quad 0.0000001200114\ldots\ .$$

Úloha 14. *Vysvětlete, v jakém smyslu platí rovnosti jako*

$$-0.25 = -0.2500000\ldots = -0.2499999\ldots\ .$$

• Lineární uspořádání $(\mathbb{Q}, <)$ není úplné: množina

$$M := \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0 \wedge x^2 < 2\} \subset \mathbb{Q}$$

nemá supremum $s = \sup(M) \in \mathbb{Q}$.

Úloha 15. *Toto s by totiž řešilo rovnici $s^2 = 2$. Ale:*

Věta 16 ($\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$). *Rovnice $x^2 = 2$ má řešení v $\mathbb{R}$, nikoli však v $\mathbb{Q}$.*

Důkaz. Číslo $x := \sup(M) \in \mathbb{R}$ (v $(\mathbb{R}, <)$) je řešení v $\mathbb{R}$. Nechť, pro spor, $x = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$. Tedy $a, b \in \mathbb{N}$ a $a^2 = 2b^2$. Ukážeme indukcí, že tato rovnice nemá v $\mathbb{N}$ řešení. Nechť a, b je řešení s nejmenší první složkou a. Takže a^2 i a je sudé číslo, $a = 2c$ pro $c \in \mathbb{N}$, a $(2c)^2 = 2b^2$ a $b^2 = 2c^2$. Ale $b < a$ a máme spor. $\square$

Řešení této rovnice označujeme jako $\sqrt{2} = 1.41421\ldots$, další řešení je $-\sqrt{2} = -1.41421\ldots$.

Úloha 17. *Dokažte, že $x^2 = 2$ nemá jiná řešení než $\pm\sqrt{2}$.*

Podobně se dokáže existence řešení v $\mathbb{R}$ pro spoustu jiných rovnic, např. $x^n = a$ s $n \in \mathbb{N}$ a $a \in \mathbb{R}$, $a \geq 0$. V $\mathbb{R}$ má tedy každé nezáporné číslo a <u>n-tou odmocninu $\sqrt[n]{a}$</u>. Úplnost tělesa $\mathbb{R}$ je první z jeho dvou základních vlastností, přejdeme ke druhé.

• Nespočetnost $\mathbb{R}$. Dvě množiny A a B mají tutéž <u>mohutnost</u> (též <u>kardinalitu</u>), když existuje bijekce $f\colon A \to B$, pak píšeme $A \approx B$. Patrně $A \approx B \Rightarrow B \approx A$ a $A \approx A$. Existuje-li injekce $f\colon A \to B$, píšeme $A \preceq B$. Cantor–Bernsteinova věta 7 tak praví, že $A \preceq B \wedge B \preceq A \Rightarrow A \approx B$. Množina A je <u>nekonečná</u>, když $\mathbb{N} \preceq A$, jinak je <u>konečná</u>. Množina A je <u>spočetná</u>, když $A \approx \mathbb{N}$. Je-li A konečná nebo spočetná, je A <u>nejvýše spočetná</u>. Když A není nejvýše spočetná, je A <u>nespočetná</u>. Ukážeme, že $\mathbb{R}$ je nespočetná.

Věta 18 ($\mathbb{R}$ je nespočetná). *Množina reálných čísel $\mathbb{R}$ je nespočetná.*

Důkaz. Ukážeme, že už jen reálná čísla

$$X := \{0.a_1a_2\cdots \in \mathbb{R} \mid a_n \in \{0,1\}\}$$

tvoří nespočetnou množinu. Nechť $(a_n) \subset X$, třeba $a_1 = 0.1101\ldots$, $a_2 = 0.0001\ldots$, $a_3 = 0.0111\ldots$, $a_4 = 0.0101\ldots$, $\ldots$ nebo tak nějak. Definujeme $b = 0.b_1b_2\cdots \in X$: b_n je změněná n-tá cifra za desetinnou tečkou čísla a_n. Zde tedy $b = 0.0100\ldots$. Tato definice zaručuje, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $b \neq a_n$ a posloupnost (a_n) tak nevyčerpala celou X. Tento postup lze uplatnit na každou funkci $f\colon \mathbb{N} \to X$ a žádná proto není na, tím méně bijekce. $\square$

Ve větách 28 a 29 je tato záležitost pojednána obecněji.

Úloha 19. $A \preceq \mathbb{N} \iff$ *A je nejvýše spočetná.*

Úloha 20. $A \preceq B \wedge B$ *je spočetná* $\Rightarrow A$ *je nejvýše spočetná.*

Úloha 21. $A \approx B \wedge B \approx C \Rightarrow A \approx C$.

Úloha 22. $A \approx B \wedge C \approx D \Rightarrow A \times C \approx B \times D$.

Úloha 23. $k \geq 2 \Rightarrow A^k \approx A^{k-1} \times A$.

Úloha 24. *Sjednocení dvou nejvýše spočetných množin dává nejvýše spočetnou množinu.*

Věta 25 (o spočetnosti). *Platí následující.*

1. *Jsou-li A a B spočetné množiny, je i $A \times B$ spočetná. Analogicky to platí pro nejvýše spočetné množiny A a B.*

2. *Množiny $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ a $\mathbb{Q}$ jsou spočetné.*

3. Je-li každá z množin A a $B \in A$ spočetná, je množina

$$\bigcup A := \{X \mid \exists\, B:\ B \in A \wedge X \in B\}$$

spočetná.

4. Je-li každá z množin A a $B \in A$ nejvýše spočetná, je $\bigcup A$ nejvýše spočetná.

Důkaz. Asi na cvičeních. Ovšem body 3 a 4 se nedají dokázat bez axiomu výběru. Dobré cvičení je si uvědomit, jak přesně se axiom výběru v jejich důkazech použije.

Dokážeme alespoň část 2. *Vahou* zlomku $\frac{a}{b}$ rozumíme $|a| + |b|$ ($\in \mathbb{N}$). Bijekci z $\mathbb{N}$ do $\mathbb{Q}$ dostaneme vyjmenováním zlomků v základním tvaru, nejprve těch s vahou 1, pak těch s vahou 2, atd.: $\frac{0}{1}$, $-\frac{1}{1}$, $\frac{1}{1}$, $-\frac{1}{2}$, $-\frac{2}{1}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{1}$, $-\frac{1}{3}$, ... Důkaz spočetnosti množiny $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ je podobný a vlastně jednodušší. □

Úloha 26. *Může být spočetné sjednocení nejvýše spočetných množin konečná množina?*

• Axiom výběru, zkráceně AC z anglického the axiom of choice, praví, že

$$\begin{aligned}&(\forall\, B \in A:\ B \neq \emptyset) \Rightarrow\\ &\Rightarrow \exists\, f:\ (f\colon A \to \bigcup A) \wedge (\forall\, B \in A:\ f(B) \in B)\end{aligned}$$

— pro každou množinu A, jejímž prvkem není $\emptyset$, existuje zobrazení f, které každé $B \in A$ přiřadí nějaký její prvek $f(B) \in B$. Bylo dokázáno, že axiom výběru nelze z ostatních axiomů teorie množin ani odvodit ani vyvrátit.

• Potenční množina (též potence) $\mathcal{P}(A)$ množiny A je množina

$$\mathcal{P}(A) := \{X \mid X \subset A\}$$

všech podmnožin X množiny A. Např. $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$ a $\mathcal{P}(\{1,2\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$.

Úloha 27. *Potence n-prvkové množiny má 2^n prvků.*

Věta 28 (Cantorova o potenci). *Zobrazení z množiny A do její potence $\mathcal{P}(A)$ nikdy není na,*

$$(f\colon A \to \mathcal{P}(A)) \Rightarrow f[A] \neq \mathcal{P}(A)\ .$$

Tedy vždy $A \not\approx \mathcal{P}(A)$.

Důkaz. Buď dána funkce $f\colon A \to \mathcal{P}(A)$. Definujeme množinu

$$B := \{a \in A \mid a \notin f(a)\} \in \mathcal{P}(A)\ .$$

Kdyby $B \in f[A]$ a tedy $B = f(b)$ pro nějaké $b \in A$, měli bychom spor

$$b \in B \iff b \notin f(b) = B\ .$$

Tedy $B \notin f[A]$ a f není na. □

Zobrazení $A \ni a \mapsto \{a\} \in \mathcal{P}(A)$ je jistě prosté, takže pro každou množinu A máme $A \preceq \mathcal{P}(A)$, podle věty ale $A \not\approx \mathcal{P}(A)$. Potence množiny má vždy ostře větší mohutnost než má množina.

• Russelův paradox — je nazvaný podle svého autora *Bertranda Russela (1872–1970)*. Předešlá definice množiny B ukazuje, že „definice“ potenční množiny $\mathcal{P}(A)$ výše je nebezpečná. Obě definice zkombinujeme a „definujeme“ množinu

$$R := \{X \mid X \notin X\}\ .$$

Dostali jsme tím SPOR V MATEMATICE:

$$R \in R \iff R \notin R\ .$$

„Definice“ množin typu $\{X \mid \dots\}$ se zcela libovolnou množinou X jsou tedy nepřípustné. „Definice“ potenční množiny výše je ve formalizované teorii množin ve skutečnosti axiomem, *axiomem existence potenční množiny.* Totéž platí pro hořejší „definici“ sumy $\bigcup A$.

Věta 29 (o $\mathbb{R}$). $\mathbb{R} \approx \mathcal{P}(\mathbb{N})$*, takže množina reálných čísel* $\mathbb{R}$ *je nespočetná.*

Důkaz. $\mathbb{R}$ je patrně nekonečná množina, a tak z $\mathbb{R} \approx \mathcal{P}(\mathbb{N})$ plyne nespočetnost $\mathbb{R}$ podle věty 28 a úlohy 21. Kdyby $\mathbb{R} \approx \mathbb{N}$, bylo by $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \approx \mathbb{N}$, ve sporu s větou 28. $\mathbb{R} \approx \mathcal{P}(\mathbb{N})$ dokážeme pomocí Cantor–Bernsteinovy věty 7. Injekce z $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ do $\mathbb{R}$ ve tvaru desetinných rozvojů je jasná:

$$\mathbb{N} \supset A \mapsto 0.a_1a_2\ldots \in \mathbb{R}$$

s $a_n = 0$ (resp. $a_n = 1$), když $n \not\in A$ (resp. $n \in A$). Například množina prvočísel $A = \{2, 3, 5, 7, \dots\}$ se pošle na reálné číslo $0.0110101\dots$. Injekci z $\mathbb{R}$ do $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ definujeme pomocí rozkladu množiny $\mathbb{N}$ na intervaly I_n délky 10:

$$I_n := \{10(n-1)+1,\ 10(n-1)+2,\ \dots,\ 10n\},\ n \in \mathbb{N}\ .$$

Reálné číslo $\alpha \in \mathbb{R}$ pak kódujeme jako podmnožinu

$$A = \textstyle\bigcup_{n=1}^{\infty} J_n \subset \mathbb{N}$$

pomocí volby množin $J_n \subset I_n$. Když $\alpha \geq 0$, je $J_1 = \emptyset$. Když $\alpha < 0$, je $J_1 = \{1\}$. Když je n-tá pozice v čísle α cifra $i = 0, 1, \dots, 9$, je $J_{n+1} = \{10n + i + 1\}$. Když je n-tá pozice v čísle α desetinná čárka (či tečka), je $J_{n+1} = \emptyset$. Například

$$\mathbb{R} \ni -3.141592\cdots \mapsto \{1,\ 14,\ 32,\ 45,\ 52,\ 66,\ 80,\ 83,\ \dots\} \subset \mathbb{N}\ .$$

Je jasné, že jde o prosté zobrazení z $\mathbb{R}$ do $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. $\square$

• Transcendentní čísla. Číslo $\alpha \in \mathbb{R}$ je algebraické, je-li kořenem nenulového polynomu s celočíselnými koeficienty: existují celá čísla $a_0, a_1, \ldots, a_n$, $n \in \mathbb{N}_0$ a $a_n \neq 0$, že

$$a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + \cdots + a_n\alpha^n = 0 \ .$$

Jinak je α transcendentní. Například čísla $\sqrt{2}$ a $-\sqrt{2}$ jsou algebraická. Velkým úspěchem Cantorovy teorie množin je následující výsledek.

Důsledek 30 ($\exists$ transc. čísla). *Transcendentní čísla existují a jejich množina je dokonce nespočetná.*

Důkaz. Stačí dokázat, že množina $\mathbb{A} \subset \mathbb{R}$ algebraických čísel je nejvýše spočetná. Kdyby transcendentní čísla $\mathbb{R} \setminus \mathbb{A}$ byla nejvýše spočetnou množinou, podle úlohy 24 by množina $\mathbb{R} = \mathbb{A} \cup (\mathbb{R} \setminus \mathbb{A})$ byla nejvýše spočetná, ve sporu s větou 29.

Nechť P je množina nenulových celočíselných polynomů (daných svými koeficienty) a pro $p = p(x) \in P$ nechť $K_p \subset \mathbb{A}$ je množina (reálných) kořenů polynomu p. Patrně

$$P \preceq \textstyle\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{Z}^n \ \text{ a } \ \mathbb{A} = \bigcup_{p \in P} K_p \ .$$

Množina $\mathbb{Z}$ je spočetná a díky bodu 1 věty 25, úloze 23 a indukci podle n máme, že každá množina $\mathbb{Z}^n$ je spočetná. Podle bodu 3 věty 25 je tedy první sjednocení výše spočetná množina a podle úlohy 20 je P nejvýše spočetná množina. Podle úlohy 31 je každá množina K_p konečná, takže podle bodu 4 věty 25 je množina $\mathbb{A}$ nejvýše spočetná. $\square$

Úloha 31. *Připomeňte si, jak se v algebře dokazuje, že pro každý polynom* $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \in P$ *má* K_p *nejvýše* $\deg p := n$ *prvků.*

První příklady transcendentních čísel nalezl více než dvacet let před G. Cantorem *Joseph Liouville (1809–1882)*. Ten zhruba v r. 1844 dokázal, že například číslo ($n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$)

$$\sum_{n=1}^{\infty} 10^{-n!} = 0.110001000000000000000001 00\ldots$$

je transcendentní. Transcendentnost čísel $e = 2.71828\ldots$, resp. $\pi = 3.14159\ldots$, dokázali *Charles Hermite (1822–1901)* v r. 1873, resp. *Ferdinand von Lindemann (1852–1939)* v r. 1882.

• Komplexní čísla. Podle sylabu předmětu se mají „okrajově zmínit“, takže tak učiníme. Množinu komplexních čísel $\mathbb{C}$ definujeme jako

$$\mathbb{C} := \{a + bi \mid a,\, b \in \mathbb{R}\}\ ,$$

tedy $\mathbb{C} \approx \mathbb{R}^2$. Zápis „$a+bi$“ zde znamená pouze usp. dvojici (a, b). Nuly a jedničky se vynechávají a například $-i$ tak označuje totéž jako $0 + (-1)i$. Aritmetické operace s komplexními čísly jsou definovány dobře známým způsobem, v němž při násobení je $i^2 = i \cdot i = -1$. Třeba

$$\begin{aligned}&(1 + 2i) \cdot (3 + 4i)\\ &= 1 \cdot 3 + 1 \cdot 4i + 2i \cdot 3 + 2i \cdot 4i = 3 + 4i + 6i - 8 = -5 + 10i\ .\end{aligned}$$

$\mathbb{C}$ je *úplné normované těleso*, což už nebudeme podrobně rozebírat. Podobně jako $\mathbb{R}$ zaplňuje díry ve $\mathbb{Q}$, přidává $\mathbb{C}$ k $\mathbb{R}$ všechny chybějící kořeny polynomů — třeba polynom x^2+1 nemá v $\mathbb{R}$ žádný kořen, ale v $\mathbb{C}$ se chová řádně a má dva kořeny i a $-i$. Platí známá *Základní věta algebry*,

Věta 32 (ZVAlg). *Každý nekonstantní komplexní polynom má v $\mathbb{C}$ kořen,*

$$n \in \mathbb{N} \wedge (a_0,\, a_1,\, \ldots,\, a_n \in \mathbb{C}) \wedge a_n \neq 0$$
$$\Rightarrow \exists\, \alpha \in \mathbb{C}:\ a_0 + a_1\alpha + \cdots + a_n\alpha^n = 0\ .$$

Její důkazy se neobejdou bez nástrojů matematické analýzy.

DĚKUJI ZA POZORNOST!