

Jméno a příjmení, kruh:

Zkouška z Matematické analýzy I, 15. února 2007 (90 minut)

1. (6 b.) Rozhodněte, zda existuje limita

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sin x + \sqrt{|\cos x|})$$

a pokud ano, vypočítejte ji. Odpověď zdůvodněte.

2. (6 b.)

- (a) Definujte pojmy: vlastní limita posloupnosti; prstencové okolí bodu; cauchyovská posloupnost.
- (b) Nechť (a_n) a (b_n) jsou dvě posloupnosti s kladnými členy. Rozhodněte, které z následujících dvou tvrzení je pravdivé. (i) Když (a_n) a (b_n) jsou obě cauchyovské, potom je posloupnost (a_n/b_n) cauchyovská. (ii) Když (a_n) a (b_n) mají obě kladnou vlastní limitu, potom je posloupnost (a_n/b_n) cauchyovská. Odpovědi zdůvodněte.

3. (6 b.)

- (a) Definujte pojem derivace funkce a uveďte (bez důkazů) výsledky o souvislosti mezi (první) derivací funkce a její monotonií a extrémy.
- (b) Nechť $f : (1, 2) \rightarrow \mathbb{R}$ je funkce. Které z následujících třech implikací pro f platí? (i) Když je f na $(1, 2)$ spojitá a má v bodě $a \in (1, 2)$ globální minimum, potom $f'(a) = 0$. (ii) Když má f na $(1, 2)$ vlastní derivaci a je na $(1, 2)$ rostoucí, potom $f'(a) > 0$ pro každé $a \in (1, 2)$. (iii) Když $f'(a) < 0$ pro nějaké $a \in (1, 2)$, potom f není na intervalu $(1, 2)$ neklesající. Odpovědi zdůvodněte.

4. (6 b.) Zformulujte a dokažte nutnou podmínku konvergence řady a tvrzení o vztahu mezi konvergencí a absolutní konvergencí řady.