

Jméno a příjmení, kruh:

Zkouška z Matematické analýzy I, 6. února 2007 (90 minut)

1. (6 b.) Vypočítejte limitu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{\sqrt{n+1}} - e^{\sqrt{n}}.$$

2. (6 b.)

- (a) Definujte pojmy: shora omezená množina reálných čísel; omezená funkce $f : M \rightarrow \mathbb{R}$; infimum množiny reálných čísel.
- (b) Nechť $M, N \subset (0, +\infty)$ jsou dvě množiny kladných reálných čísel, přičemž M je shora omezená. O každé ze tří množin $M - N = \{x - y : x \in M, y \in N\}$, $M/N = \{x/y : x \in M, y \in N\}$ a $N/M = \{x/y : x \in N, y \in M\}$ rozhodněte, zda musí být také shora omezená. Odpovědi zdůvodněte.

3. (6 b.)

- (a) Definujte pojem inflexního bodu funkce a uveďte (bez důkazů) výsledky o souvislosti mezi derivacemi funkce a inflexním bodem.
- (b) Ano nebo ne: když má funkce $f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ v nule inflexní bod a funkce $g : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ je v nule spojitá, pak součinnová funkce $f(x)g(x) : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ má v nule také inflexní bod. Odpověď zdůvodněte.
- (c) Pro které hodnoty parametrů $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ má funkce

$$f(x) = \begin{cases} \beta + \sin x & \dots x < 0 \\ e^{\alpha x} & \dots x \geq 0 \end{cases}$$

v nule inflexní bod? Odpověď zdůvodněte.

4. (6 b.) Dokažte, že Eulerovo číslo $e = 2.71828 \dots$ je iracionální.