Jméno a příjmení, kruh:

Zkouška z Matematické analýzy I, 22. ledna 2007 (90 minut)

1. (6 b.) Nalezněte lokální a globální extrémy funkce $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definované jako $f(0) = \frac{1}{10}$ a

$$f(x) = x^x \quad \text{pro } x > 0.$$

   Odpovědi zdůvodněte.

2. (6 b.)

   (a) Definujte pojmy: částečný součet nekonečné řady; absolutně konvergentní řada; Cauchyova podmínka pro řady.

   (b) Rozhodněte, zda pro každou řadu platí ekvivalence

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konverguje} \iff \text{konvergují obě řady } \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n},\ \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}.$$

   Pokud neplatí, rozhodněte o platnosti obou implikací $\Rightarrow$ a $\Leftarrow$. Odpovědi zdůvodněte.

3. (6 b.)

   (a) Uveďte (bez důkazů) základní výsledky popisující vztah mezi limitami posloupností a aritmetickými operacemi, a limitami posloupností a uspořádáním.

   (b) Pro posloupnost (a_n) definujeme čárkovanou posloupnost (a'_n) jako $a'_n = a_n$ pro sudé n a $a'_n = (a_n)^2$ pro liché n. Popište všechny konvergentní posloupnosti (a_n), pro něž je i čárkovaná posloupnost (a'_n) konvergentní. Odpověď zdůvodněte.

4. (6 b.) Zformulujte a dokažte větu o derivaci složené funkce.