Domácí úkoly z Diskrétní matematiky

(4. ledna 2007)

Úkol 1. (ze dne 4.10., k odevzdání do 18.10.)
Mějme n přímek v rovině v obecné poloze (tj. žádné dvě nejsou rovnoběžné a žádné tři se neprotínají v jednom bodě). Dokažte, že rovina je těmito přímkami rozdělena na $\frac{1}{2}n(n+1)+1$ částí. [1b]

Úkol 2. (ze dne 4.10., k odevzdání do 18.10.)
Nechť přirozené číslo n má rozklad na prvočísla $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} ... p_k^{a_k}$ (kde $p_1 < ... < p_k$ jsou prvočísla). Dokažte indukcí podle k, že součet všech dělitelů čísla n je roven

$$\prod_{i=1}^{k} \frac{p_i^{a_i+1} - 1}{p_i - 1}.$$

[2b]

Úkol 3. (ze dne 18.10., k odevzdání do 25.10.)
Nechť R_1, R_2 jsou dvě relace ekvivalence na množině X. Rozhodněte (a zdůvodněte), zda jsou ekvivalencemi i následující relace:

a) $R_1 \cap R_2$, [$\frac{1}{2}$b]

b) $R_1 \cup R_2$, [1b]

c) $R_1 \setminus R_2$. [$\frac{1}{2}$b]

Úkol 4. (ze dne 25.10., k odevzdání do 1.11.)
Uvažme množinu $\{1, \ldots, n\}$ uspořádanou dle dělitelnosti $|$. Najděte na této množině maximální řetězec a antiřetězec. Jakou mají délku? [1+1b]

Úkol 5. (ze dne 1.11., k odevzdání do 8.11.)
Spočítejte:

a) $\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}$, [1b]

b) $\sum_{k=1}^{n} k^2\binom{n}{k}$. [1b]

Úkol 6. (ze dne 8.11., k odevzdání do 15.11.)
Kolika způsoby můžeme rozesadit n manželských párů na $2n$ židlí kolem kulatého stolu, aby žádný manželský pár neseděl vedle sebe? [2b]

Úkol 7. (ze dne 15.11., k odevzdání do 3.1.)
Vymyslete originální kombinatorickou úlohu a dodejte včetně řešení. [1-2b]

Úkol 8. (ze dne 22.11., k odevzdání do 29.11.)
Rozhodněte, zda existují dva neisomorfní grafy, které mají stejné skóre, a to:

a) (2,2,2,2,2), [1b]

b) (1,1,3,3,3,3). [1b]

Úkol 9. (ze dne 22.11., k odevzdání do 29.11.)
Rozhodněte, pro která $n \in \mathbb{N}$ existuje 3-regulární graf (všechny stupně jsou rovny 3) na n vrcholech. Dokážete takový graf také nakreslit? [2b]

Úkol 10. (ze dne 29.11., k odevzdání do 6.12.)
Graf nazýváme k-regulární, pokud všechny jeho stupně jsou rovny k. Dokažte, že existuje k-regulárni graf na n vrcholech právě tehdy, když $n > k$ a $k.n$ je sudé. [2b]

Úkol 11. (ze dne 29.11., k odevzdání do 6.12.)
V úplném grafu K_n mezi dvěma danými vrcholy u, v určete počet všech cest

a) dané délky l, [1b]

b) všech délek. [1b]

Úkol 12. (ze dne 6.12., k odevzdání do 13.12.)
Buď T strom s $n \geq 2$ vrcholy a nechť p_i je počet vrcholů T se stupněm i. Dokažte rovnost:

$$p_1 - p_3 - 2p_4 - 3p_5 - \ldots - (n-3)p_{n-1} = 2.$$ [2b]

Úkol 13. (ze dne 6.12., k odevzdání do 13.12.)
Určete, pro která $n \in \mathbb{N}$ existuje graf na n vrcholech se dvěma disjunktními kostrami. Nezapomeňte takový graf nakreslit. [2b]

Úkol 14. (ze dne 13.12., k odevzdání do 20.12.)
Rozhodněte, zda Petersenův graf je rovinný. [2b]

Úkol 15. (ze dne 13.12., k odevzdání do 20.12.)
Dokažte, že Kruskalův algoritmus na hledání minimální kostry dokáže postupně najít všechny minimální kostry tak, že pokaždé přetřídíte posloupnost hran (vždy ale aby byla neklesající podle vah). [2b]

Úkol 16. (ze dne 20.12., k odevzdání do 3.1.)
Dokažte, že pro $n \geq 11$ doplněk rovinného grafu na n vrcholech není rovinný. [2b]

Úkol 17. (ze dne 20.12., k odevzdání do 3.1.)
Nakreslete mapu pravidelného dvanáctistěnu nebo dvacetistěnu (všechny stěny musí být konvexní!). [2b]

P.S. Nezapomeňte na 7. úlohu, můžete dodat i více příkladů (rozumné množství), klidně i s grafovou tématikou.

Další bodované úlohy

1. Je $(6, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 4, 4)$ skóre rovinného grafu?
2. Pro které $k \in \mathbb{N}$ existuje k-regulární (všechny stupně rovny k) rovinný graf?
3. Buď X částečně uspořádaná množina, r velikost největšího řetězce. Dokažte, že X je rovno sjednocení nejvýše r jeho antiřetězců.
4. Definujme $(D_n, |)$ jeho množinu všech dělitelů čísla n uspořádanou dle dělitelnosti. Pro $n = 10!$ najděte maximální řetězec (jeho velikost) a určete kolik takovýchto maximálních řetězců existuje.
5. Určete barevnost Petersenova grafu.
6. Sestrojte 3-regulární graf se dvěma mosty a minimem vrcholů.
7. Sestrojte 3-regulární graf na 16 vrcholech a s právě jedním mostem.