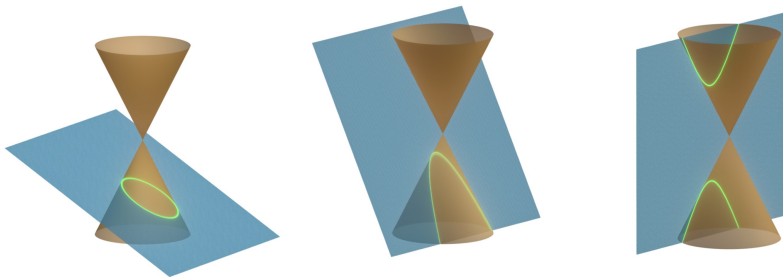


Kuželosečky a kvadriky

[Wiki:] „*Kuželosečka je rovinná křivka, která vznikne jako průnik roviny s rotační kuželovou plochou*“

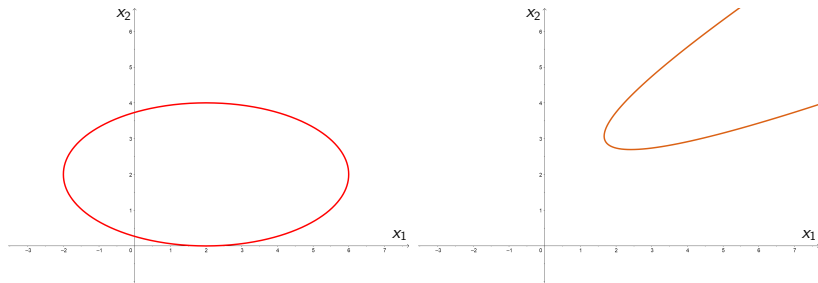


Obr: en.wikipedia.org/wiki/Conic_section

Kuželosečky a kvadriky

Definice: *Kuželosečka* je množina řešení homogenní rovnice s reálným polynomem stupně dva ve dvou proměnných, neboli:

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + v_1x_1 + v_2x_2 + t = 0\}$$



Vlevo: $(x_1 - 2)^2 + 4(x_2 - 2)^2 = 16 \dots$ elipsa

Vpravo: $2x_1^2 - 8x_1x_2 + 8x_2^2 + (8\sqrt{5} - 4)x_1 - (16\sqrt{5} + 2)x_2 + 50 = 0$
... elipsa ? parabola ? hyperbola

Obr: www.geogebra.org/graphing

Kuželosečky a kvadriky

Definice: *Kuželosečka* je množina řešení homogenní rovnice s reálným polynomem stupně dva ve dvou proměnných, neboli:

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + v_1x_1 + v_2x_2 + t = 0\}$$

Stejná rovnice zapsaná pomocí matice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ a vektoru $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$:

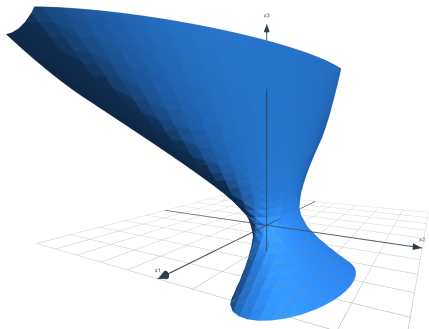
$$\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{v}^T \mathbf{x} + t = 0$$

(Bud' volíme $a_{21} = 0$ nebo koeficient u x_1x_2 rozdělíme symetricky.)

Definice: Pro matici $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{d \times d}$, vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^d$ a skalár $t \in \mathbb{R}$ je *kvadrika* množina $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{v}^T \mathbf{x} + t = 0\}$.

V nedegenerovaném případě dostaneme $(d-1)$ -dimenzionální plochu v prostoru dimenze d .

$$\begin{aligned} &x_1^2 + 3x_2^2 - x_3^2 \\ &+ x_1x_2 + x_1x_3 + 4x_2x_3 \\ &+ 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 3 = 0 \end{aligned}$$



Obr: www.math3d.org

Aplikace

- ▶ pohyb planet v astronomii — elipsy
- ▶ konstrukce optických zrcadel a mikrofonů — parabolické plochy
- ▶ lineární programování — elipsoidová metoda
- ▶ fyzika — výpočet napětí uvnitř tělesa nebo popis rotačního pohybu tuhých těles (např. gyroskopy)
- ▶ statistika — analýza hlavních komponent např. pro snížení velikosti velkých souborů dat bez významné ztráty dat
- ▶ informatika — rozpoznávání vzorů, neuronové sítě
- ▶ elektronika — návrh a analýza chování obvodů
- ▶ aritmetika, teorie čísel, ...

Transformace kvadriky

- ▶ Dána $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{v}^T \mathbf{x} + t = 0$ se symetrickou \mathbf{A} vůči bázi B .
- ▶ Najdeme bázi C , aby $[\text{id}]_{C,B}$ byla ortogonální a $\mathbf{D} = [\text{id}]_{C,B}^T \mathbf{A} [\text{id}]_{C,B}$ byla diagonální.
- ▶ Provedeme (první) substituci $\mathbf{x} = [\text{id}]_{C,B} \mathbf{y}$, čímž dostaneme $\mathbf{y}^T \mathbf{D} \mathbf{y} + \mathbf{w}^T \mathbf{y} + t = 0$ pro $\mathbf{w} = [\text{id}]_{C,B}^T \mathbf{v}$.
Geometricky jde o isometrii, čili natočení systému souřadnic.

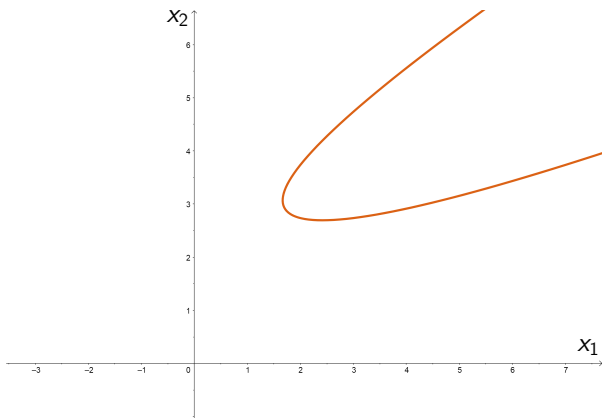
- ▶ Pro každé $d_{ii} \neq 0$ nahradíme (podruhé) $y_i = z_i - \frac{w_i}{2d_{ii}}$.
Jde o takový posun počátku souřadnicového systému, že $d_{ii} y_i^2 + w_i y_i = d_{ii} \left(z_i - \frac{w_i}{2d_{ii}} \right)^2 + w_i \left(z_i - \frac{w_i}{2d_{ii}} \right) = d_{ii} z_i^2 - \frac{w_i^2}{4d_{ii}}$
čili nenulové kvadratické členy pohltnou své lineární členy.

Dostaneme $\mathbf{z}^T \mathbf{D} \mathbf{z} + \mathbf{u}^T \mathbf{z} + s = 0$,

$$u_i = \begin{cases} 0 & \text{pro } d_{ii} \neq 0 \\ w_i & \text{pro } d_{ii} = 0 \end{cases} \quad \text{a} \quad s = t - \sum_{d_{ii} \neq 0} \frac{w_i^2}{4d_{ii}}.$$

- ▶ Nyní snáze odvodíme tvar, osy, střed a další parametry.

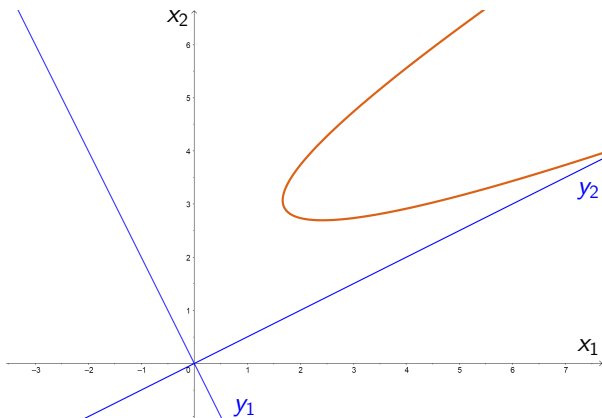
Ukázka transformace



$$2x_1^2 - 8x_1x_2 + 8x_2^2 + (8\sqrt{5} - 4)x_1 - (16\sqrt{5} + 2)x_2 + 50 = 0$$

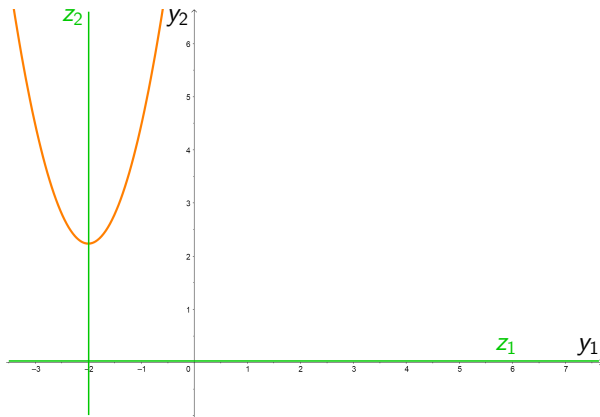
Diagonalizujeme matici $\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 8 \end{pmatrix}$ pro nalezení nové báze.

Ukázka transformace



Třeba použít ortogonální $[id]_{C,B} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$,
abychom provedli pouze isometrii (rotaci os).

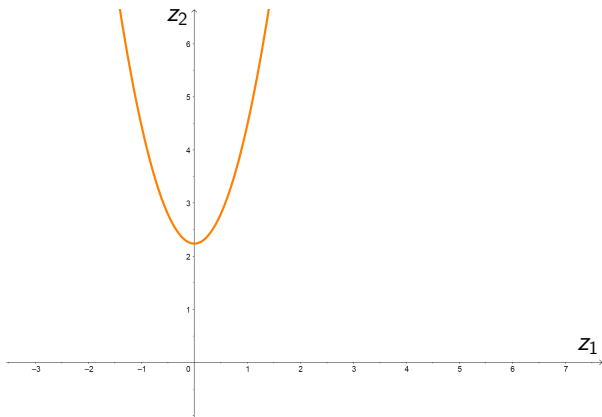
Ukázka transformace



$$10y_1^2 - 2\sqrt{5}y_2 + 40y_1 + 50 = 0$$

Provedeme substituci $y_1 = z_1 - 2$, $y_2 = z_2$ (horizontální posun).

Ukázka transformace



Výsledná parabola: $10z_1^2 - 2\sqrt{5}z_2 + 10 = 0$.

(Tu lze svisle posunout do počátku a eliminovat konstantní člen.)