

Kvadratické formy nad tělesy charakteristiky 2

Je-li $\text{char}(T) = 2$, potom některé kvadratické formy g nelze odvodit z žádné symetrické bilineární formy, např. $g(\mathbf{v}) = v_1 v_2$. Proto matice takových forem g není definována.

Na druhou stranu, je-li \mathbf{A} symetrická matice řádu n , potom pro analytické vyjádření formy $g(\mathbf{v}) = \mathbf{v}^T \mathbf{A} \mathbf{v}$ platí: $g(\mathbf{v}) = \sum_{i=1}^n a_{ii} v_i^2$, protože každý ze smíšených členů $a_{ij} v_i v_j$ se odečte s $a_{ji} v_j v_i$.
Je-li totiž $\text{char}(T) = 2$, pak $a_{ij} v_i v_j + a_{ji} v_j v_i = (1 + 1) a_{ij} v_i v_j = 0$.

Ukázka:
$$\mathbf{v}^T \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{v} = v_1^2 + v_1 v_2 + v_2 v_1 = v_1^2 = \mathbf{v}^T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{v}$$

Důsledek: Lze-li kvadratickou formu g nad T charakteristiky 2 vyjádřit součinem $g(\mathbf{v}) = \mathbf{v}^T \mathbf{A} \mathbf{v}$ se symetrickou \mathbf{A} , potom ji lze vyjádřit pomocí $g(\mathbf{v}) = \mathbf{v}^T \mathbf{D} \mathbf{v}$ s diagonální maticí \mathbf{D} .

Tyto formy obsahují jen kvadratické členy a žádné smíšené.

Matice \mathbf{D} je dána jednoznačně vztahem $d_{ii} = a_{ii}$ pro $i = 1, \dots, n$.

Diagonalizace matic forem nad ostatními tělesy

Věta: Je-li g kvadratická forma na vektorovém prostoru V konečné dimenze n nad tělesem T charakteristiky odlišné od 2, pak forma g má diagonální matici vzhledem k vhodné bázi B . (Věta platí i pro symetrické bilineární formy.)

Definice: *Polární báze* dává diagonální matici kvadratické formy. Přeformulováno jako *diagonalizace matic kvadratických forem*:

Věta: Pro jakoukoli symetrickou matici $A \in T^{n \times n}$ s $\text{char}(T) \neq 2$ existuje regulární matice R taková, že $R^T A R$ je diagonální.

Ukázka: Matici formy $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ lze nad \mathbb{Z}_3 diagonalizovat např.:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nad \mathbb{Z}_2 by $g(v) = 0$, ale součin tří regulárních není 0, proto tuto matici nelze nad \mathbb{Z}_2 diagonalizovat součinem $R^T A R$.

Poznámka: U *reálných* matic věta platí již díky diagonalizaci symetrických matic lineárních zobrazení pomocí *ortogonálních* R . Ty splňují $R^T = R^{-1}$, a tak jsou diagonální i $R^T A R = R^{-1} A R$.

Věta: Pro jakoukoli symetrickou matici $A \in T^{n \times n}$ s $\text{char}(T) \neq 2$ existuje regulární matice R taková, že $R^T A R$ je diagonální.

Důkaz: Indukcí podle n .

Označme $A = A_n =$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline a_{11} & b^T \\ \hline b & B \\ \hline \end{array}$$

► Pro $a_{11} \neq 0$ a $P_n =$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & -\frac{1}{a_{11}} b^T \\ \hline 0 & I_{n-1} \\ \hline \end{array}$$

máme $P_n^T A_n P_n =$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 0^T \\ \hline -\frac{1}{a_{11}} b & I_{n-1} \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|c|} \hline a_{11} & b^T \\ \hline b & B \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & -\frac{1}{a_{11}} b^T \\ \hline 0 & I_{n-1} \\ \hline \end{array}$$

$$= \begin{array}{|c|c|} \hline a_{11} & b^T \\ \hline 0 & -\frac{1}{a_{11}} b b^T + B \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & -\frac{1}{a_{11}} b^T \\ \hline 0 & I_{n-1} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline a_{11} & 0^T \\ \hline 0 & A_{n-1} \\ \hline \end{array}$$

kde $A_{n-1} = B - \frac{1}{a_{11}} b b^T$ je symetrická.

Věta: Pro jakoukoli symetrickou matici $A \in T^{n \times n}$ s $\text{char}(T) \neq 2$ existuje regulární matice R taková, že $R^T A R$ je diagonální.

Důkaz: Indukcí podle n .

Označme $A = A_n =$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & b^T \\ b & B \end{bmatrix}$$

► Pro $a_{11} \neq 0$ a $P_n =$

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{a_{11}} b^T \\ 0 & I_{n-1} \end{bmatrix}$$

máme $P_n^T A_n P_n =$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0^T \\ 0 & A_{n-1} \end{bmatrix},$$

kde $A_{n-1} = B - \frac{1}{a_{11}} b b^T$ je symetrická. Dle indukčního předpokladu určíme R_{n-1} pro A_{n-1} . Zvolíme $R_n = P_n \cdot$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0^T \\ 0 & R_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Pak $R_n^T A_n R_n =$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0^T \\ 0 & R_{n-1}^T \end{bmatrix} \cdot P_n^T A_n P_n \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0^T \\ 0 & R_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & 0^T \\ 0 & R_{n-1}^T A_{n-1} R_{n-1} \end{bmatrix}$$

je diagonální.

Věta: Pro jakoukoli symetrickou matici $A \in T^{n \times n}$ s $\text{char}(T) \neq 2$ existuje regulární matice R taková, že $R^T A R$ je diagonální.

Důkaz: Indukcí podle n .

Označme $A = A_n =$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & b^T \\ b & B \end{bmatrix}$$

► Pro $a_{11} \neq 0$ a $P_n =$

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{a_{11}} b^T \\ 0 & I_{n-1} \end{bmatrix}$$

máme $P_n^T A_n P_n =$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0^T \\ 0 & A_{n-1} \end{bmatrix},$$

kde $A_{n-1} = B - \frac{1}{a_{11}} b b^T$ je symetrická. Dle indukčního předpokladu určíme R_{n-1} pro A_{n-1} . Zvolíme $R_n = P_n$. Potom $R_n^T A_n R_n$ je diagonální.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0^T \\ 0 & R_{n-1} \end{bmatrix}$$

Ukázka: $T = \mathbb{Z}_3$, $A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $P_3 = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{2}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$$A_2 = B - \frac{1}{a_{11}} b b^T = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} (2, 1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$R_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, R_3^T A_3 R_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Věta: Pro jakoukoli symetrickou matici $A \in T^{n \times n}$ s $\text{char}(T) \neq 2$ existuje regulární matice R taková, že $R^T A R$ je diagonální.

Důkaz: Indukcí podle n .

Označme $A = A_n =$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & b^T \\ b & B \end{bmatrix}$$

► Pro $a_{11} \neq 0$ a $P_n =$

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{a_{11}} b^T \\ 0 & I_{n-1} \end{bmatrix}$$

máme $P_n^T A_n P_n =$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0^T \\ 0 & A_{n-1} \end{bmatrix}$$

kde $A_{n-1} = B - \frac{1}{a_{11}} b b^T$ je symetrická. Dle indukčního předpokladu určíme R_{n-1} pro A_{n-1} . Zvolíme $R_n = P_n$. Potom $R_n^T A_n R_n$ je diagonální.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0^T \\ 0 & R_{n-1} \end{bmatrix}$$

► Pokud $a_{11} = 0$, ale $b \neq 0$, pak $a_{i1} \neq 0$ pro nějaké i .

Pokud $a_{ij} = 0$, použijeme elementární matici E pro přičtení i -tého sloupce k prvnímu. Poté vezmeme $A' = E^T A E$ namísto A . Protože $a'_{11} = 2a_{i1} \neq 0$, lze postupovat stejně jako v předchozím případě.

Jinak použijeme E pro záměnu i -tého a j -tého sloupce a analogicky dostaneme $a'_{11} = a_{ii} \neq 0$.

► Pro $a_{11} = 0$ a $b = 0$ vezmeme $A_{n-1} = B$ a $R_n =$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0^T \\ 0 & R_{n-1} \end{bmatrix}$$

Metody diagonalizace

- ▶ Reálné symetrické lze diagonalizovat pomocí vlastních čísel.
- ▶ Gaussovou eliminací — každou řádkovou operaci provedeme *současně* na řádky i na sloupce.

Pozorování: Je-li \mathbf{A} symetrická, je $\mathbf{A}' = \mathbf{E}^T \mathbf{A} \mathbf{E}$ také symetrická.

Důsledek: Dolní trojúhelníková $\mathbf{R}^T \mathbf{A} \mathbf{R}$ je i diagonální.

Ukázka:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & | & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{\text{ř.}}{\sim} \text{II-I} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{\text{sl.}}{\sim} \text{II-I} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\underset{\text{III+I}}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & | & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{\text{III-II}}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Ve výsledné blokové matici je vlevo diagonální matice $\mathbf{R}^T \mathbf{A} \mathbf{R}$
a vpravo je matice *řádkových úprav* čili \mathbf{R}^T .

Vektory polární báze B jsou sloupce $\mathbf{R} = [\text{id}]_{B,E}$ čili řádky této \mathbf{R}^T .

Sylvesterův zákon setrvačnosti

Věta: Každá kvadratická forma na konečně generovaném *reálném* vektorovém prostoru má vzhledem k vhodné bázi diagonální matici pouze s 1 , -1 a 0 . Všechny takové diagonální matice odpovídající téže formě mají stejný počet 1 a stejný počet -1 .

Definice: Necht' reálná kvadratická forma g má diagonální matici D obsahující pouze 1 , -1 a 0 .

Signatura formy g je trojice $(\#1, \#-1, \#0)$, počítáno na diagonále matice D .

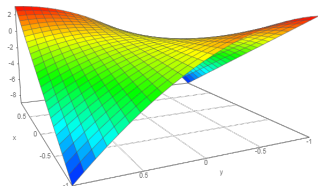
Sylvesterův zákon setrvačnosti

Věta: Každá kvadratická forma na konečně generovaném *reálném* vektorovém prostoru má vzhledem k vhodné bázi diagonální matici pouze s 1 , -1 a 0 . Všechny takové diagonální matice odpovídající téže formě mají stejný počet 1 a stejný počet -1 .

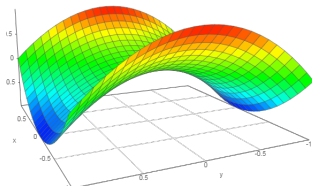
Ukázka: $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ daná $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$ vzhledem k E .

Matice g vzhledem k bázi: $B = \left(\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right)^T, \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right)^T \right)$ je

$$\mathbf{D} = [\text{id}]_{B,E}^T \mathbf{A} [\text{id}]_{B,E} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

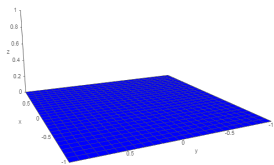


$$6x_1x_2 - 3x_2^2$$

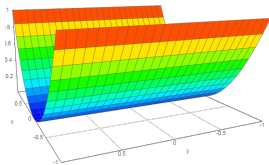


$$x_1^2 - x_2^2$$

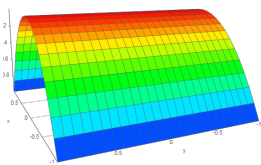
Diagonalizované kvadratické formy $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$



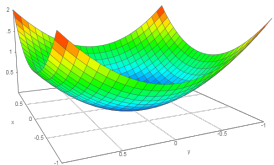
0, signatura (0, 0, 2)



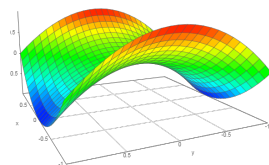
x_1^2 , sig. (1, 0, 1)



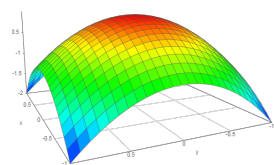
$-x_1^2$, sig. (0, 1, 1)



$x_1^2 + x_2^2$, sig. (2, 0, 0)



$x_1^2 - x_2^2$, sig. (1, 1, 0)



$-x_1^2 - x_2^2$, sig. (0, 2, 0)

(seřazeno podle hodnoty a poté 1 před -1)

Sylvesterův zákon setrvačnosti

Věta: Každá kvadratická forma na konečně generovaném *reálném* vektorovém prostoru má vzhledem k vhodné bázi diagonální matici pouze s 1 , -1 a 0 . Všechny takové diagonální matice odpovídající téže formě mají stejný počet 1 a stejný počet -1 .

Důkaz:

1. Existence: Nechť A je maticí formy vzhledem k nějaké bázi B . Reálné symetrické matice lze diagonalizovat, čili $A = R^T D' R$ pro regulární R a diagonální D' .

Rozložíme $D' = S^T D S$, kde
$$\begin{cases} \text{pro } d'_{ii} = 0 : d_{ii} = 0, & s_{ii} = 1, \\ \text{pro } d'_{ii} > 0 : d_{ii} = 1, & s_{ii} = \sqrt{d'_{ii}}, \\ \text{pro } d'_{ii} < 0 : d_{ii} = -1, & s_{ii} = \sqrt{-d'_{ii}}. \end{cases}$$

Nyní je SR regulární a $A = (SR)^T D SR$.

Zvolíme bázi C tak, že souřadnice vektorů C vzhledem k B jsou sloupce $(SR)^{-1}$, tzn. $[id]_{C,B} = (SR)^{-1}$ (neboli $[id]_{B,C} = SR$).

Nyní $[id]_{C,B}^T A [id]_{C,B} = ((SR)^{-1})^T (SR)^T D SR (SR)^{-1} = D$ je hledaná diagonální matice formy vůči bázi C .

Sylvesterův zákon setrvačnosti

Věta: Každá kvadratická forma na konečně generovaném *reálném* vektorovém prostoru má vzhledem k vhodné bázi diagonální matici pouze s 1 , -1 a 0 . Všechny takové diagonální matice odpovídající téže formě mají stejný počet 1 a stejný počet -1 .

Ukázka:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 7 & -10 & -2 \\ -10 & 4 & 8 \\ -2 & 8 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 18 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \mathbf{R}^T \mathbf{D}' \mathbf{R}$$

$$\mathbf{D}' = \begin{pmatrix} 18 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{S}^T \mathbf{D} \mathbf{S}$$

$$[\text{id}]_{B,C} = \mathbf{S} \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 3\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} & -2\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 1 & 2 & -2 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{R}^T \mathbf{D}' \mathbf{R} = \mathbf{R}^T \mathbf{S}^T \mathbf{D} \mathbf{S} \mathbf{R} = (\mathbf{S} \mathbf{R})^T \mathbf{D} \mathbf{S} \mathbf{R} = [\text{id}]_{B,C}^T \mathbf{D} [\text{id}]_{B,C}$$

$$\Leftrightarrow [\text{id}]_{C,B}^T \mathbf{A} [\text{id}]_{C,B} = \mathbf{D}$$

2. Jednoznačnost počtu 1, -1 a 0:

Nechť $B = (\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n)$, $C = (\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_n)$ jsou dvě báze t.ž. odpovídající matice B a C formy g jsou diagonální s 1, -1 a 0 uspořádanými tak, že nejdříve jsou 1, potom -1 a 0 jsou poslední.

Protože součiny s regulárními maticemi $[\text{id}]_{C,B}$ nemění hodnotu: $\#0 \text{ v } B = n - \text{rank } B = n - \text{rank } C = \#0 \text{ v } C$.

Označme $r = \#1 \text{ v } B$ a $s = \#1 \text{ v } C$. Pokud by $r > s$, pak uvažme podprostory $\text{span}(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_r)$ a $\text{span}(\mathbf{c}_{s+1}, \dots, \mathbf{c}_n)$. Součet jejich dimenzí $r + n - s$ přesahuje n , a proto mají netriviální průnik.

B	$\mathbb{R}^n \quad \dim = n$	C
• \mathbf{b}_1	$\text{span}(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_r)$ $\dim = r$	• \mathbf{c}_1
• \mathbf{b}_r		• \mathbf{c}_s
• \mathbf{b}_{r+1}	$\bullet 0 \quad \dim \geq 1 \quad \bullet v$ $\text{span}(\mathbf{c}_{s+1}, \dots, \mathbf{c}_n)$ $\dim = n - s$	• \mathbf{c}_{s+1}
• \mathbf{b}_n		• \mathbf{c}_n

Používáme větu o průniku a spojení: $\dim U + \dim V = \dim(U \cap V) + \dim(\text{span}(U \cup V))$

Levá strana je ostře větší než n ,
 $\dim(\text{span}(U \cup V)) \leq \dim \mathbb{R}^n = n$
 $\Rightarrow \dim(U \cap V) \geq 1$

2. Jednoznačnost počtu 1, -1 a 0:

Nechť $B = (\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n)$, $C = (\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_n)$ jsou dvě báze t.ž. odpovídající matice B a C formy g jsou diagonální s 1, -1 a 0 uspořádanými tak, že nejdříve jsou 1, potom -1 a 0 jsou poslední.

Protože součiny s regulárními maticemi $[\text{id}]_{C,B}$ nemění hodnot: $\#0$ v $B = n - \text{rank } B = n - \text{rank } C = \#0$ v C .

Označme $r = \#1$ v B a $s = \#1$ v C . Pokud by $r > s$, pak uvažme podprostory $\text{span}(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_r)$ a $\text{span}(\mathbf{c}_{s+1}, \dots, \mathbf{c}_n)$. Součet jejich dimenzí $r + n - s$ přesahuje n , a proto mají netriviální průnik.

Zvolme $\mathbf{v} \in (\text{span}(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_r) \cap \text{span}(\mathbf{c}_{s+1}, \dots, \mathbf{c}_n)) \setminus \mathbf{0}$, čili $[\mathbf{v}]_B = (a_1, \dots, a_r, 0, \dots, 0)^T$, $[\mathbf{v}]_C = (0, \dots, 0, d_{s+1}, \dots, d_n)^T$.

Protože $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, alespoň jedno z a_1, \dots, a_r je nenulové.

Tato a_1, \dots, a_r odpovídají 1 v diagonální matici B , a proto platí:

$g(\mathbf{v}) = [\mathbf{v}]_B^T B [\mathbf{v}]_B = a_1^2 + \dots + a_r^2 > 0$. Podobně odvodíme:

$g(\mathbf{v}) = [\mathbf{v}]_C^T C [\mathbf{v}]_C = -d_{s+1}^2 - \dots - d_{\text{rank}(C)}^2 \leq 0$, protože nenulové dílčí součiny tvoří jen $d_{s+1}, \dots, d_{\text{rank}(C)}$ z $[\mathbf{v}]_C$ a -1 z diagonály C .

Ze sporu vyplývá, že $r \not> s$. Symetricky též $s \not> r$, a proto $r = s$.

Poznámky

Pozorování: Formy s *reálnými* pozitivně definitními maticemi jsou ty, které lze diagonalizovat na **I**.

— porovnejte s Choleského faktorizaci $\mathbf{A} = \mathbf{U}^H \mathbf{U} = \mathbf{U}^T \mathbf{I} \mathbf{U}$.

Pozorování: Analogická věta pro *komplexní symetrické* formy (jiné matice než hermitovské!) dává diagonální matice s **1** a **0** na diagonále; včetně setrvačnosti.

Otázky k porozumění tématu přednášky

- ▶ Je pravda, že pokud lze symetrickou matici \mathbf{A} diagonalizovat pomocí $\mathbf{R}^T \mathbf{A} \mathbf{R}$, pak \mathbf{R} lze vždy zvolit horní trojúhelníkovou?
- ▶ Je pravda, že když má kvadratická forma g na V nad \mathbb{R} diagonální matici s nějakými 1 a nějakými -1 , pak existují vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ takové že $g(\mathbf{u}) < 0 < g(\mathbf{v})$?
- ▶ Je-li matice \mathbf{A} diagonalizována pomocí ortogonální \mathbf{R} , jaký je vztah mezi původní a novou (t.j. polární) bází?
- ▶ Jakým situacím v důkazu zákona setrvačnosti odpovídají případy, kdy matice \mathbf{B} nebo \mathbf{C} nemají na diagonále žádné 1 ? (Čili $r = 0$ nebo $s = 0$.)
- ▶ Za jakých okolností platí v témže důkazu $[\mathbf{v}]_C^T \mathbf{C} [\mathbf{v}] = 0$?