Bilineární a kvadratické formy

Definice: Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T a nechť zobrazení $f : V \times V \to T$ splňuje:

- $\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V, \forall t \in T : f(t\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{u}, t\boldsymbol{v}) = tf(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$
- $\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V : f(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = f(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}) + f(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$
- $\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V : f(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = f(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) + f(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w})$

Poté se f nazývá *bilineární forma* na V.

Bilineární forma je *symetrická*, když $\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V : f(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u})$.

Zobrazení $g : V \to T$ se nazývá *kvadratická forma*, pokud existuje bilineární forma f taková, že $g(\boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v})$ pro všechna $\boldsymbol{v} \in V$.

Příklady: Každý skalární součin na prostoru nad $\mathbb{R}$, *ale ne nad* $\mathbb{C}$!

Pro $V = \mathbb{Z}_5^2$, bilineární forma:

$f(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = u_1 v_1 + 2u_1 v_2 + 4u_2 v_1 + 3u_2 v_2$

Odpovídající kvadratická forma:

$g(\boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) = v_1 v_1 + 2v_1 v_2 + 4v_2 v_1 + 3v_2 v_2 = v_1^2 + v_1 v_2 + 3v_2^2$

Matice forem

Definice: Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T s bází $B = (\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n)$. *Matice bilineární formy f vzhledem k bázi B* je matice $\boldsymbol{A}$ o složkách $a_{ij} = f(\boldsymbol{b}_i, \boldsymbol{b}_j)$.

Matice kvadratické formy g je matice symetrické bilineární formy f odpovídající g, pokud taková symetrická f existuje.

Ukázka: Pro $V = \mathbb{Z}_5^2$ a přirozenou bázi E, má bilineární forma $f(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = u_1 v_1 + 2u_1 v_2 + 4u_2 v_1 + 3u_2 v_2$ matici $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ a kvadratická forma $g(\boldsymbol{v}) = v_1^2 + v_1 v_2 + 3v_2^2$ má matici $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$.

Na $V = \mathbb{Z}_2^2$ odpovídá kvadratické formě $g(\boldsymbol{v}) = v_1 v_2$ např. bilineární forma s maticí $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, ale žádná symetrická.

Matice forem

Definice: Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T s bází $B = (\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n)$. *Matice bilineární formy f vzhledem k bázi B* je matice $\boldsymbol{A}$ o složkách $a_{ij} = f(\boldsymbol{b}_i, \boldsymbol{b}_j)$.
Matice kvadratické formy g je matice symetrické bilineární formy f odpovídající g, pokud taková symetrická f existuje.

Pozorování: $a_{ij} = f(\boldsymbol{b}_i, \boldsymbol{b}_j) = \frac{1}{2}(g(\boldsymbol{b}_i + \boldsymbol{b}_j) - g(\boldsymbol{b}_i) - g(\boldsymbol{b}_j))$

Důkaz: $g(\boldsymbol{b}_i + \boldsymbol{b}_j) = f(\boldsymbol{b}_i + \boldsymbol{b}_j, \boldsymbol{b}_i + \boldsymbol{b}_j)$
$= f(\boldsymbol{b}_i, \boldsymbol{b}_i) + f(\boldsymbol{b}_i, \boldsymbol{b}_j) + f(\boldsymbol{b}_j, \boldsymbol{b}_i) + f(\boldsymbol{b}_j, \boldsymbol{b}_j)$
$g(\boldsymbol{b}_i + \boldsymbol{b}_j) - g(\boldsymbol{b}_i) - g(\boldsymbol{b}_j) = f(\boldsymbol{b}_i, \boldsymbol{b}_j) + f(\boldsymbol{b}_j, \boldsymbol{b}_i)$

Pozorování: Použití matic forem:

$$f(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = [\boldsymbol{u}]_B^T \boldsymbol{A} [\boldsymbol{v}]_B, \quad g(\boldsymbol{v}) = [\boldsymbol{v}]_B^T \boldsymbol{A} [\boldsymbol{v}]_B.$$

Důkaz: Když $\boldsymbol{u} = \sum_{i=1}^{n} c_i \boldsymbol{b}_i$ a $\boldsymbol{v} = \sum_{j=1}^{n} d_j \boldsymbol{b}_j$, pak

$$f(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = f\left(\sum_{i=1}^{n} c_i \boldsymbol{b}_i, \sum_{j=1}^{n} d_j \boldsymbol{b}_j\right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_i f(\boldsymbol{b}_i, \boldsymbol{b}_j) d_j = [\boldsymbol{u}]_B^T \boldsymbol{A} [\boldsymbol{v}]_B$$

Pozorování: Nechť $\boldsymbol{A}$ je matice bi/kv formy vzhledem k bázi B. Potom $[\mathrm{id}]_{C,B}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{A}[\mathrm{id}]_{C,B}$ je matice stejné formy vzhledem k bázi C.

Důkaz: $[\boldsymbol{u}]_B = [\mathrm{id}]_{C,B}[\boldsymbol{u}]_C$, $[\boldsymbol{v}]_B = [\mathrm{id}]_{C,B}[\boldsymbol{v}]_C$,

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) &= [\boldsymbol{u}]_B^{\mathsf{T}}\boldsymbol{A}[\boldsymbol{v}]_B = ([\mathrm{id}]_{C,B}[\boldsymbol{u}]_C)^{\mathsf{T}}\boldsymbol{A}[\mathrm{id}]_{C,B}[\boldsymbol{v}]_C \\ &= [\boldsymbol{u}]_C^{\mathsf{T}}[\mathrm{id}]_{C,B}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{A}[\mathrm{id}]_{C,B}[\boldsymbol{v}]_C. \end{aligned}$$

Definice: *Analytické vyjádření* bilineární formy f nad T^n s maticí $\boldsymbol{A}$ je homogenní polynom f druhého stupně ve $2n$ proměnných daný výrazem: $f((u_1,\ldots,u_n)^{\mathsf{T}},(v_1,\ldots,v_n)^{\mathsf{T}}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}u_iv_j$.

…analogicky pro kvadratické formy a/nebo vzhledem k bázi B.

Ukázka: Forma f s maticí $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ má analytické vyjádření $f(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = u_1v_1 + 2u_1v_2 + 4u_2v_1 + 3u_2v_2$.

Otázky k porozumění tématu přednášky

- Pokud existuje symetrická forma, který odpovídá dané kvadratické formě, je pak jednoznačná?
- Jak se změní koeficienty analytického vyjádření, když změníme bázi?